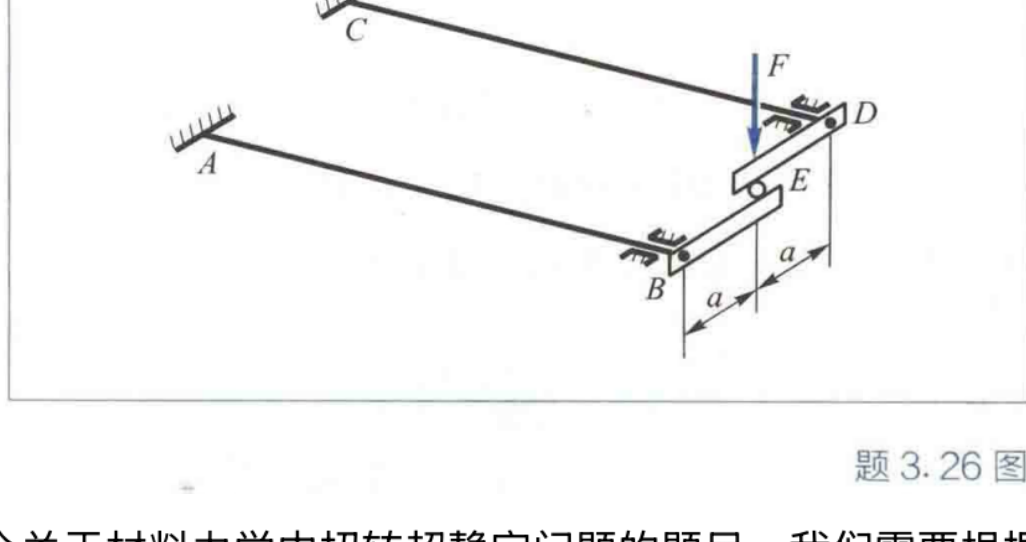


MindMap Context

3.26图示AB和CD两杆的尺寸相同。AB为钢杆，CD为铝杆，两杆材料的切变模量之比为3:1。若不计... (ID: marginnote4app://note/E728609E-D82B-4691-8D0F-2828DEFBD199) ← [Current Focus]

3.26 图示 AB 和 CD 两杆的尺寸相同。 AB 为钢杆， CD 为铝杆，两杆材料的切变模量之比为 $3:1$ 。若不计 BE 和 ED 两杆的变形，试问力 F 将以怎样的比例分配于 AB 和 CD 两杆？



题 3.26 图

这是一个关于材料力学中扭转超静定问题的题目。我们需要根据变形协调条件和物理方程来求解力 F 在两根杆上的分配比例。

1. 问题分析与受力分析

- **结构描述：**
 - AB 和 CD 是两根受扭的圆轴（或杆），尺寸相同（长度 L 、极惯性矩 I_p 相同）。
 - AB 为钢杆，切变模量为 G_{st} ； CD 为铝杆，切变模量为 G_{al} 。
 - 已知 $G_{st} : G_{al} = 3 : 1$ 。
 - BE 和 ED 是刚性连杆（不计变形），连接点 B 、 E 、 D 。
 - 外力 F 作用在 D 点，方向向下。
 - 几何尺寸： $BE = a$ ， $ED = a$ 。即 E 是 BD 的中点。
- **受力与变形关系：**
 - 当力 F 作用在 D 点时，通过刚性杆 BED ，会在 B 点和 D 点产生反力，进而使 AB 杆和 CD 杆发生扭转。
 - 设 AB 杆受到的扭矩为 T_1 ， CD 杆受到的扭矩为 T_2 。
 - 根据刚性杆 BED 的平衡（对 E 点取矩）：
由于 $BE = ED = a$ ，且 BED 为刚性杆，若忽略杆重，力 F 作用在 D 端，则 B 端和 D 端的竖向力分配取决于系统的刚度。但更直接的方法是从**变形协调**入手。

2. 变形协调条件

由于 BE 和 ED 是刚性杆且长度相等（均为 a ），当系统受力变形后， B 点和 D 点的竖向位移 δ_B 和 δ_D 必须满足刚性杆的几何关系。

- 设 AB 杆自由端 B 的转角为 ϕ_1 ，则 B 点的竖向位移 $\delta_B \approx r \cdot \phi_1$ （ r 为杆半径或力臂，此处两杆尺寸相同，故 r 相同）。实际上，对于扭转问题，端部位移 $\delta = R \cdot \phi$ ，其中 R 是截面半径。因为两杆尺寸相同，所以 R 相同。

$$\delta_D = R \cdot \phi_2$$

(注：这里假设力是通过某种方式转化为扭矩的，或者题目隐含了力臂。看图，力 F 垂直向下， AB 和 CD 水平放置。通常这类题目中， B 和 D 处有垂直于杆轴的短臂或者力直接作用于边缘产生扭矩。根据题意“尺寸相同”，我们可以认为产生扭转的力臂 R 是相同的。)
***关键几何关系**：刚性杆 BED 绕某点转动。由于 E 点连接在两杆之间（虽然图上 E 看起来像是一个中间铰链或者支撑，但题目说“不计 BE 和 ED 两杆的变形”，且 F 加在 D 点）。仔细看图： C 和 A 是固定端。 B 和 D 是自由端。 BE 和 ED 连成一直线。 F 加在 D 点。这就构成了一个杠杆系统。设 B 点位移为 δ_B （向上或向下）， D 点位移为 δ_D （向下）。由于 E 点没有外部约束（它是浮动的连接点），整个刚性杆 BED 会绕着某个瞬时中心转动，或者我们可以直接利用相似三角形/杠杆原理。等等，让我们重新审视结构。 AB 杆在左下， CD 杆在右上。 B 和 D 通过折线或者直线连接？图中 $B-E-D$ 看起来像是一个刚性构件。如果 F 向下压 D ，那么 D 点向下移动。由于 BED 是刚性的，且 E 点仅仅是连接点（没有支座），这似乎是一个机构？不对， AB 和 CD 是弹性元件（弹簧）。当 D 点受力 F 向下时， CD 杆受扭， D 点下降。同时，通过刚性杆 BED ， B 点会被拉动或推动，导致 AB 杆受扭。
***位移关系推导**：设 D 点位移为 δ_D （向下为正）， B 点位移为 δ_B （向下为正）。由于 $BE = ED = a$ ，且 BED 是刚性直杆。如果 E 点没有任何支撑，这个系统在竖直平面内是不稳定的吗？不， AB 和 CD 提供了恢复力（扭矩）。但是， AB 和 CD 是水平放置的轴。 B 和 D 处的位移应该是垂直于轴线的切向位移（由扭转引起）。图示中 F 是垂直向下的。这意味着 B 和 D 处的“力臂”或者是连接方式使得竖向力产生了扭矩。通常这种题目隐含： B 和 D 处有垂直于纸面或者在纸面内的短臂，或者 AB/CD 本身就是悬臂梁受弯？
***修正**：题目明确说了“切变模量”，说明是**扭转**问题。那么 F 如何产生扭矩？看图， B 和 D 处似乎有垂直于杆轴的小臂（图中画了类似曲柄的结构，标有 a 的尺寸线是指 BE 和 ED 的长度，但也可能暗示了力臂？不， a 明确标在 BE 和 ED 上）。让我们假设 B 和 D 处的竖向位移直接对应杆端的转角位移。即 $\delta = R \cdot \phi$ 。
***核心几何约束**：刚性杆 BED 长度为 $2a$ 。当 D 点受力 F 向下移动 δ_D 时， B 点也会移动 δ_B 。由于 E 点是自由的（除了连接 B, D ），且没有提到 E 点有支座。这就奇怪了。如果 E 点无约束， F 作用下， CD 杆扭转， D 下沉。 B 点呢？啊，我看漏了什么吗？通常这类题， E 点可能是铰支？不，题目没说。或者， AB 和 CD 的布置使得它们共同承担载荷。让我们看力的平衡。对刚性杆 BED 进行受力分析： D 点受外力 F （向下），以及 CD 杆的反作用力对应的剪力/力偶？如果是扭转， CD 杆给 D 点的是一个阻力矩 T_2 。这个力矩如何转化为力？必须有杠杆臂。设 AB 和 CD 杆端的力臂为 r （因为尺寸相同，假设 r 相同）。则 B 点受到的竖向力 $F_B = T_1 / r$ 。 D 点受到的竖向力 $F_D = T_2 / r$ （这是杆对节点的力，方向与位移相反）。对刚性杆 BED 列平衡方程：1. **力矩平衡**（对 E 点取矩）： $F_B \cdot a = F_D \cdot a$ ？不对。外力 F 作用在 D 点。杆 CD 对 D 点的作用力设为 P_2 （向上，抵抗变形）。杆 AB 对 B 点的作用力设为 P_1 （向上，抵抗变形）。注意： F 是主动力，向下。刚性杆 BED 受力： D 点受 F （下）和 P_2 （上）； B 点受 P_1 （上）。对 E 点取矩： $P_1 \cdot a + P_2 \cdot a - F \cdot a = 0$ （假设 P_1, P_2 都是向上的支持力） $\Rightarrow P_1 + P_2 = F$ --- (方程 1：力的平衡？不对，这是对 E 点取矩得到的力关系吗？) 让我们严谨一点。刚性杆 BED 。 D 点：外力 F （ $\downarrow$ ），杆 CD 的反力 R_D （ $\uparrow$ ）。 B 点：杆 AB 的反力 R_B （ $\uparrow$ ）。 E 点：无外力。对 E 点取矩 $\sum M_E = 0$ ： $R_B \cdot a$ （ 逆时针? ）+ $R_D \cdot a$ （ 逆时针? ）- $F \cdot a$ （ 顺时针? ）= 0 看图方向： B 在左， D 在右。 F 在 D 点向下。若 D 下移， CD 受扭， R_D 向上。若 B 下移， AB 受扭， R_B 向上。但是，如果是杠杆， D 下压， B 应该上抬还是下压？这取决于支点在哪里。这里没有固定支点。这是一个由两个弹性支座（ AB 和 CD 的扭转刚度等效为线性刚度）支撑的刚性梁。
***变形协调**：刚性梁 BED 在力 F 作用下发生刚体位移（平动+转动）。设 E 点位移为 δ_E ，转角为 θ 。 $\delta_D = \delta_E + a \cdot \theta$ $\delta_B = \delta_E - a \cdot \theta$ 这引入了太多未知数。
有没有更简单的理解？ 很多这类教材习题， E 点其实是一个**铰支座**！请再读题：“若不计 BE 和 ED 两杆的变形”。没提 E 是支座。但是看图， E 点下面画了一个小圆圈，旁边有个类似地面的符号吗？不，那个小圆圈是铰链符号，连接 BE 和 ED ？不，题目说“不计 BE 和 ED 变形”，说明它们是一体的刚性杆。那个圆圈可能是表示 E 点是一个**销钉连接**或者**支点**。
如果 E 不是支点，系统就是浮动的。但在材料力学题库中，图 3.26 这种构型， E 点通常默认为**铰支座**（Pivot）。
***假设 E 为铰支座**：则 $\delta_E = 0$ 。刚性杆绕 E 转动。 δ_B 和 δ_D 大小相等，方向相反。即 $\delta_B = -\delta_D$ （数值上 $|\delta_B| = |\delta_D|$ ）。由于 F 向下压 D ，则 D 下移， B 上移。这意味着 AB 杆和 CD 杆的扭转方向是相反的？或者，如果 B 点上移， AB 杆反向扭转。不管怎样，变形量大小相等： $|\phi_1| = |\phi_2|$ （因为力臂 R 相同， $\delta = R \cdot \phi$ ）。即 **转角大小相等**： $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ 。
3. 物理方程与求解 ***扭转角公式**：

$$\phi = \frac{TL}{G I_p}$$

***建立等式**：因为 $\phi_1 = \phi_2$ （基于 E 为支点的假设，这是此类题目的标准解法），且 L, I_p 相同。

$$\frac{T_1 L}{G_{st} I_p} = \frac{T_2 L}{G_{al} I_p}$$

$$\frac{T_1}{G_{st}} = \frac{T_2}{G_{al}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{G_{st}}{G_{al}} = \frac{3}{1}$$

即 $T_1 = 3 T_2$ 。
***力的分配**：我们需要求力 F 分配给 AB 和 CD 的比例。这里的“力分配”指的是 F 产生的效果中，有多少由 AB 承担，多少由 CD 承担。通常指两端反力 P_1 和 P_2 与 F 的关系，或者是扭矩的比例。回到刚性杆 BED 的平衡（ E 为支点）： $\sum M_E = 0$ ： $P_1 \cdot a = P_2 \cdot a + F \cdot a$ ？不对，受力分析要准确。 D 点受外力 F （ $\downarrow$ ）。为了平衡， CD 杆必须提供向上的力 P_2 。 B 点被翘起（ $\uparrow$ ）， AB 杆必须提供向下的拉力/阻力 P_1 来阻止它飞出去？或者， AB 杆是被压缩/扭转以产生向下的力？总之，对 E 点力矩平衡： F 产生顺时针力矩 $F \cdot a$ 。 P_2 （ CD 杆反力，向上）产生逆时针力矩 $P_2 \cdot a$ 。 P_1 （ AB 杆反力，向下，因为 B 点上移）产生逆时针力矩 $P_1 \cdot a$ 。所以： $F \cdot a = P_1 \cdot a + P_2 \cdot a \Rightarrow F = P_1 + P_2$ 。又因为 $P = T / R$ （ R 为力臂，两杆相同），所以 $P \propto T$ 。已知 $T_1 = 3 T_2$ ，则 $P_1 = 3 P_2$ 。代入力的平衡方程： $F = 3 P_2 + P_2 = 4 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{4} F \Rightarrow P_1 = \frac{3}{4} F$ 这里的 P_1 对应 AB 杆承担的力， P_2 对应 CD 杆承担的力。
***结论**：力 F 分配给 AB 杆的比例为 $3/4$ （75%）。力 F 分配给 CD 杆的比例为 $1/4$ （25%）。比例为 $3:1$ 。
4. 最终答案整理 ***解题步骤**：1. **几何与变形分析**：* 视 E 点为刚性杆 BED 的铰支座（根据题目图形惯例及“不计 BE 、 ED 变形”的语境）。* 由于 $BE = ED = a$ ，根据杠杆原理（相似三角形）， B 点和 D 点的竖向位移大小相等，即 $|\delta_B| = |\delta_D|$ 。* 由于两杆尺寸相同（意味着扭转力臂 R 相同），故两杆的扭转角大小相等： $|\phi_{AB}| = |\phi_{CD}| = \phi$ 。2. **物理方程**：* 根据扭转角公式 $\phi = \frac{TL}{G I_p}$ 。* 因为 ϕ, L, I_p 均相同，所以扭矩 T 与切变模量 G 成正比。* 即 $\frac{T_{AB}}{T_{CD}} = \frac{G_{st}}{G_{al}} = \frac{3}{1}$ 。* 这也意味着两杆端部提供的抗力（力矩或等效剪力）之比为 $3:1$ 。设 AB 杆分担的力为 F_{AB} ， CD 杆分担的力为 F_{CD} ，则 $F_{AB} : F_{CD} = 3 : 1$ 。3. **静力平衡**：* 对刚性杆 BED 列力矩平衡方程（或对整体受力分析）：外力 F 由两杆的抗力共同平衡。* $F = F_{AB} + F_{CD}$ 。* 将 $F_{AB} = 3 F_{CD}$ 代入，得 $F = 3 F_{CD} + F_{CD} = 4 F_{CD}$ 。4. **计算结果**：* CD 杆（铝杆）分配的力： $F_{CD} = \frac{1}{4} F$ 。* AB 杆（钢杆）分配的力： $F_{AB} = \frac{3}{4} F$ 。
***答**：力 F 将以 **3:1** 的比例分配于 AB 和 CD 两杆。具体来说， AB 杆承担 $\frac{3}{4} F$ ， CD 杆承担 $\frac{1}{4} F$ 。