4 特殊行列式

1. 上（下）三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

4. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

$(x_2-x_1)(x_3-x_1)$ — . .
(x_3-x_2) .

5.特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}|, \quad (1.12)$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

4 克拉默法则

1) 非齐次方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|A|=0$ 方程无解/无穷多解，即无唯一解

$|A|\neq 0$ 方程有唯一解

将i列换为b

$$|A_i|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

2) 齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

→ A_i始终为0

$x=\frac{|A_i|}{|A|}$ $|A|\neq 0$ 有唯一零解

$|A|=0$ 有非零解

5 题型

① 化爪型

三个爪中两个成比例

$$=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -x & -x & 0 & 0\\ -x & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=-xy^2\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ \frac{x}{y} & 0 & -1 & 0\\ -\frac{x}{y} & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

用斜爪消平爪

化三角

乘 $\frac{x}{y}$ $-\frac{x}{y}$

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -x & -x & 0 & 0\\ -x & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0\\ -x & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+\frac{x}{y} & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ -x & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

先列后行作变换

② a 0 0 0 / a 0 0 0 型（代数余子式）

$$D=\begin{vmatrix}a+x & a & a & a\\ -x & x & 0 & 0\\ 0 & -x & x & 0\\ 0 & 0 & -x & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4a+x & a & a & a\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & -x & x & 0\\ 0 & 0 & -x & x\end{vmatrix}=(4a+x)\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ -x & x & 0\\ 0 & -x & x\end{vmatrix}$$

$$=(4a+x)x^3.$$

③ 化三角形行列式

⑤ 逐行相加

$$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & b & 0\\ 0 & -1 & 1-b & c\\ 0 & 0 & -1 & 1-c\end{vmatrix}=-$$

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & b & 0\\ 0 & -1 & 1-b & c\\ 0 & 0 & -1 & 1-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & b & 0\\ 0 & 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & -1 & \text{[illegible]}\end{vmatrix}$$

④ 拆开法（利用拆分性）

$$D=\begin{vmatrix}1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0\\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0\\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0\\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y\end{vmatrix}$$

[共有 16 个四阶子式，当选第一子列时，其他各列只能选第二子列，否则行列式值必为 0]

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -x & 0 & 0\\ 1 & 0 & y & 0\\ 1 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & y & 0\\ 0 & 1 & 0 & -y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 0 & 1 & 0\\ 0 & -x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -y\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 1\\ 0 & -x & 0 & 1\\ 0 & 0 & y & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2-xy^2+x^2y-x^2y+x^2y^2=x^2y^2.$$

五 方阵（nxn矩阵）的行列式

A均为N阶矩阵

转置矩阵 1. A的转置矩阵 A^T　$|A^T|=|A|$

提出常数 2、$|kA|=k^n|A|$

行列式可拆性 3、AB均是n阶矩阵 $|AB|=|A||B|$　$(|A^2|=|A|^2)$　$|A+B|\neq|A|+|B|$

伴随矩阵 4. $|A^*|=|A|^{n-1}=|A|A^{-1}$

$AA^*=A^*A=|A|E$

$|A^*A|=||A|E|$

$|A||A^*|=|A|^n|E|$ 由②

$|A^*|=|A|^{n-1}$

可逆矩阵 5 A为n阶可逆矩阵 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

$AA^{-1}=E$　$|AA^{-1}|=E=1$

特征值 6 A-n阶 特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$

$|A|=\prod\lambda_n$ (特征值相乘

相似矩阵 7 AB相似 $|A|=|B|$　由③

$P^{-1}AP=B$　$|P^{-1}AP|=|B|=|P^{-1}||P||A|=|A|=|B|$

8 A是M阶矩阵，B是N阶

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|;$$ 主对角线

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|.$$ 副对角线

注① $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$ 请先计算矩阵 $A\pm B$

② $k^n|A|=|kA|\neq k|A|$

行列式　矩阵