2024
考研专用

金榜时代®
GLIST 明德·弘毅·惟精 01

金榜时代考研数学系列 | V研客及全国各大考研培训学校指定用书

考研数学（数学一、二、三通用）

复习全书·基础篇

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

基础三件套:《数学复习全书·基础篇》+《数学基础过关660题》+《数学历年真题全精解析·基础篇》

主编建议 | **无基础 不数学**·阐释基本概念，考查基本要点，学练结合，更进一步

主编建议 | 与《数学基础过关660题》《历年真题全精解析·基础篇》配合使用，**三位一体，夯实基础**

宠粉福利 | 右侧微信扫码，回复“**图书配套课**”即可获得本书赠送精选视频

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

线性代数

第二篇

第一章　行列式

本章考点

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

线性方程组的克拉默(Cramer)法则

一、行列式的概念

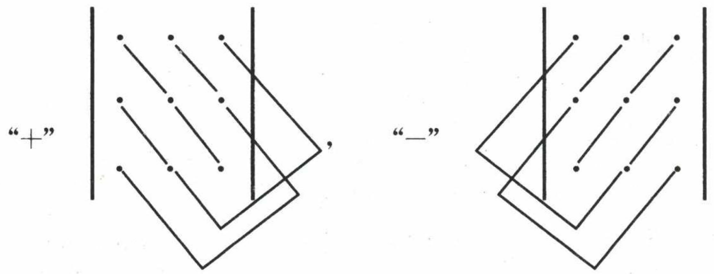
行列式是一个数，它是不同行不同列元素乘积的代数和.

例如，大家所熟悉的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

其每一项都是 3 个数的乘积，从字母看 a,b,c 各有一个，说明这三个数一个在第一行，一个在第二行，一个在第三行；而从下标看数字 1,2,3 各有一个，说明这三个数分别来自第一列，第二列和第三列.

在这六项中，有 3 项带“+”号，3 项带“−”号，大家可以用对角线方法来记忆：



当行列式的元素中有较多的“0”时，用对角线法来计算行列式的值是简便的.

例如，$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0 + 1\times4\times5 + 2\times3\times6 - 2\times0\times5 - 1\times3\times0 - 0\times4\times6 = 56.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 6 - 0 - 0 - (-3) = 1.$$

一般地，我们应当用行列式的性质将其恒等变形化简，再通过展开公式(用降阶法)来计算行列式的值.

关于 n 阶行列式的概念大家要有一个简单了解：

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1)$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1) 称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

【注】 所谓排列是指由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的一个有序数组，通常用 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 表示 n 阶排列，显然共有 $n!$ 个 n 阶排列.

一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例如，$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ 是四阶行列式中的一项，那么该项所带的符号由 $\tau(2431)=1+2+1=4$（即 2 有 1 个逆序，4 有 2 个逆序，3 有 1 个逆序）是偶排列，故取正号.

又如，$a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$ 是五阶行列式中的一项，由 $\tau(35124)=2+3=5$ 是奇排列，故在行列式中应取负号.

例 1 4 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】 因为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，由于有较多的 $a_{ij}=0$，易分析只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项非 0，而逆序数 $\tau(4321)=3+2+1=6$，所以行列式 $|\boldsymbol{A}|=abcd$.

【注】 这也提示我们，三阶行列式的对角线法到四阶行列式失灵. 今后计算四阶行列式必须用展开公式法.

例 2 (1) 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{34}$ 且带负号的项________.

(2) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2x & 1 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & x & -1 \\ x & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数为________.

【分析】 (1) 一般项：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，$j_1j_2j_3j_4$ 是 1 到 4 的排列. 现 $j_1=2, j_3=4$. 于是 j_2j_4 只能取自 1 和 3，

$\tau(2143)=1+1$ 偶排列

$\tau(2341)=1+1+1$ 奇排列

∴ 仅 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 为所求.

(2) 不同行不同列元素乘积的代数和.

若 x^3 中的 x 出现 a_{1j}，则只有两种可能：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$；若 x^3 中的 x 不出现 a_{1j}，则只有 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 一项. 因 $a_{14}=0$. 故只有两项出现 x^3.

由 $\tau(1234)=0$，$\tau(2431)=4$，均为偶排列，带正号，

即有 $x(x-1)x\cdot 2$ 和 $2x\cdot 3\cdot x\cdot x$ 含 x^3

∴x^3 的系数为 8.

二、行列式的性质

记 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 称为 $|\boldsymbol{A}|$ 的转置行列式.

性质 1 经过转置行列式的值不变，即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可知行列式行的性质与列的性质是对等的.（为方便说明，行列式都以 3 阶为例）.

性质 2 两行（或列）互换位置，行列式的值变号.

特别地，两行（或列）相同，行列式的值为 0.

性质 3 某行（或列）如有公因子 k，则可把 k 提出行列式记号外.（亦即用数 k 乘行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 等于用 k 乘它的某行（或列））.

特别地：(1) 某行（或列）的元素全为 0，行列式的值为 0.

(2) 若两行（或列）的元素对应成比例，行列式的值为 0.

性质 4 如果行列式某行（或列）是两个元素之和，则可把行列式拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

性质 5 把某行（或列）的 k 倍加到另一行（或列），行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 3 证明：任意的 a,b,c 恒有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=0$$

【证】 由行列式性质，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \quad \text{(第二行加到第三行)}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(第三行提公因数 } a+b+c\text{)}$$

$$= 0. \quad \text{(两行相同行列式为 0)}$$

例 4 证明 $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

【证】 **方法一** 把第二列、第三列均加至第一列，并提出第一列的公因式 2，得

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} 2\begin{vmatrix} a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(把第一列的 } -1 \text{ 倍分别加至第二列和第三列)}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3} 2\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(把第二列、第三列均加至第一列)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \text{(把第二列、第三列分别提出公因数 } -1\text{)}$$

【注】 倍加性质是行列式计算中常用的.

方法二 本题也可用一些同学不太熟悉的拆开(性质 4)来处理：由于行列式每一列都是 2 个数的和，那么用拆开性质左端的行列式可表示成 8 个行列式之和，但因两列相等行列式的值为 0，所以这里有 6 个行列式的值为 0.

例如，当第一列选 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 时，若第二列选 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，则第三列不论如何选择，其行列式的值必为 0. 故

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{*} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

* 前者先一、三两列互换，然后再二、三两列互换；后者先一、二两列互换，然后再二、三两列互换.

例 5 证明 $D=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{vmatrix}=0.$

【证】 由行列式性质

$$D=\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & -a_{13}\\ a_{12} & 0 & -a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & 0\end{vmatrix}\quad\text{（经转置行列式值不变）}$$

$$=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{vmatrix}\quad\text{（每行提取公因数}-1\text{）}$$

$$=-D,$$

$\therefore D=0.$

三、行列式按行（或列）展开公式

在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

中划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列的元素，由剩下的元素按原来的位置排法构成的一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

定理 1.1 n 阶行列式等于它的任何一行（列）元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj},\quad j=1,2,\cdots,n$$

前一个公式称 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开的展开式，后一个公式称 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 j 列展开的展开式.

定理 1.2 行列式的任一行（列）元素与另一行（列）元素的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

在用展开公式的时候，还要注意下面几个特殊情况的配合：

$$=\begin{vmatrix}2&5\\1&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}7&1\\8&4\end{vmatrix}=60.$$

例 7　计算行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}a+x&a&a&a\\a&a+x&a&a\\a&a&a+x&a\\a&a&a&a+x\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析一】　把每一行都加至第一行，有

$$D=\begin{vmatrix}4a+x&4a+x&4a+x&4a+x\\a&a+x&a&a\\a&a&a+x&a\\a&a&a&a+x\end{vmatrix}=(4a+x)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&a+x&a&a\\a&a&a+x&a\\a&a&a&a+x\end{vmatrix}$$

$$=(4a+x)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(4a+x)x^3.$$

【分析二】　把第一行的 -1 倍分别加到其他各行，有

$$D=\begin{vmatrix}a+x&a&a&a\\-x&x&0&0\\-x&0&x&0\\-x&0&0&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4a+x&a&a&a\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(4a+x)x^3.$$

【分析三】　先把第三行的 -1 倍加到第四行，然后把第二行的 -1 倍加到第三行，最后把第一行的 -1 倍加到第二行，有

$$D=\begin{vmatrix}a+x&a&a&a\\-x&x&0&0\\0&-x&x&0\\0&0&-x&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4a+x&a&a&a\\0&x&0&0\\0&-x&x&0\\0&0&-x&x\end{vmatrix}=(4a+x)\begin{vmatrix}x&0&0\\-x&x&0\\0&-x&x\end{vmatrix}$$

$$=(4a+x)x^3.$$

【分析四】　$D=\begin{vmatrix}a+x&a+0&a+0&a+0\\a+0&a+x&a+0&a+0\\a+0&a+0&a+x&a+0\\a+0&a+0&a+0&a+x\end{vmatrix}$ 用拆开性质应该是 16 个行列式的和，你能写出不为 0 的那 5 个行列式吗？

例 8　计算 $D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$

【分析一】　（用按行展开公式）第二行的 -1 倍加到第一行，再第一列的 -1 倍加到第二列，然后按第一行展开，

$$D=\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=-x^2\begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix}=x^2y^2.$$

【分析二】（爪型处理）第一行的 -1 倍分别加到其他每一行

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+\dfrac{x}{y} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}=x^2y^2.$$

【分析三】（拆开法）

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1-x & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+y & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1-y \end{vmatrix}$$

［共有 16 个四阶子式，当选第一子列时，其他各列只能选第二子列，否则行列式值必为 0］

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$=xy^2-xy^2+x^2y-x^2y+x^2y^2=x^2y^2.$$

例 9 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

【证】（用归纳法）

$n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$，命题成立.

设 $D_{n-1}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i-x_j)$ 成立.

对 D_n，从第 n 行开始，依次把上一行的 $-x_1$ 倍加至下一行，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$\overset{*}{=\!=\!=}(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

* 上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，归纳假设可用.

例 10 (1) 已知 $\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=0$，求 λ；

(2) 已知 $\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=0$，求 λ.

【分析】 这是 λ 的三次方程，故应用观察法对行列式恒等变形以期某一行(或列)出现 $\lambda-a$ 的因式，好破译三次方程.

【解】 (1) 把第三列加到第一列，有

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 2\\ \lambda-2 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4 & 2\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

(2) 把第一列的 -2 倍加至第三列，有

$$\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2-2\lambda\\ -2 & \lambda-4 & 0\\ 2 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -10 & 0\\ -2 & \lambda-4 & 0\\ 2 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4 & -10\\ -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0.$$

所以 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.

四、克拉默法则

定理 1.3 （克拉默法则）

若 n 个方程 n 个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组(1) 有唯一解，且

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{A}_i|}{|\boldsymbol{A}|}, i = 1,2,\cdots,n$$

其中 $|\boldsymbol{A}_i|$ 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 i 列元素(即 x_i 的系数) 替换成方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所构成的行列式.

【注】 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，方程组可能无解，也可能有无穷多解，但一定不是有唯一解.

推论 若包含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组(2) 只有零解.

反之，若齐次线性方程组(2) 有非零解，则其系数行列式必为 0，即 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

例 11 方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

的解中，$x_1 =$ ________.

【分析】 系数行列式是范德蒙德行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1-2)(-3-2)[-3-(-1)] = -30$$

又 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -6$，故 $x_1 = \dfrac{1}{5}$.

例 12 已知 $A(1,2)$，$B(4,0)$ 是平面上的两个点，则经过 A，B 两点的直线方程是 ________.

【分析】 设所求直线方程为 $ax + by + c = 0$，

$P(x,y)$ 是该直线上任意一点，则(x,y)，$(1,2)$，$(4,0)$ 应满足直线方程，即有

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 4a + c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

因存在经过 A,B 两点的直线，那么 a,b,c 不全为 0，即齐次方程组(1) 必有非零解，从而

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore 2x + 3y - 8 = 0$ 为所求.

练习 1

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$ ________.

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ ________.

(4) 已知 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$，求 λ.

(5) 已知 $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0$，求 λ.

(6) 已知齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，则 $\lambda =$ ________.

(练习答案在 297 页)

第二章 矩阵

本章考点

矩阵的概念 单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

一、矩阵的概念及运算

1. 矩阵的概念

定义 $m\times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ **矩阵**，当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**或叫 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**.

如果一个矩阵的所有元素都是 0，即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则称这个矩阵是**零矩阵**，可简记为 $\boldsymbol{O}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times t}$，如果 $m=s$，$n=t$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**.

两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记成 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

【注】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个表格，而行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个数，这里的概念与符号不要混淆. $\boldsymbol{A}=$

$\boldsymbol{O}$ 与 $|\boldsymbol{A}|=0$ 是不同的，不能搞错. 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时可以有 $|\boldsymbol{A}|=0$，当然也可能有 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；这些基本常识要想清楚.

2. 矩阵的运算

定义(加法) 两个同型矩阵(行数与列数分别相等)可以相加，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

定义(数量乘法，简称数乘) 设 k 是数，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是矩阵，则定义数与矩阵的乘法为

$$k\boldsymbol{A}=k[a_{ij}]_{m\times n}=[ka_{ij}]_{m\times n}$$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}8 & 3 & 5\\ 1 & 2 & -6\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+8 & 3+3 & -2+5\\ 0+1 & -4+2 & 5+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times 1 & 3\times 3 & 3\times(-2)\\ 3\times 0 & 3\times(-4) & 3\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9 & -6\\ 0 & -12 & 15\end{bmatrix}$$

定义(乘法) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵($\boldsymbol{A}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的行数)，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可乘，且乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 记成 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行、第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 s 个元素和 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素两两乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

矩阵的乘法可图示如下：

$$\underset{m\times s}{i\left[\begin{array}{c}\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is}}\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{array}\right]}\ \underset{s\times n}{\underset{j}{\left[\begin{array}{ccc}\vdots & \boxed{\begin{array}{c}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{array}} & \vdots\end{array}\right]}}=\underset{m\times n}{\underset{j}{\left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots\\ & \vdots & \end{array}\right]}i}$$

特别地，设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，则记 $\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{k个}=\boldsymbol{A}^k$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 10+2\times(-5) & 1\times(-4)+2\times 2\\ 3\times 10+6\times(-5) & 3\times(-4)+6\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}10 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 14\\ 21 & 42\end{bmatrix}=7\boldsymbol{A}$$

矩阵的乘法是基本的也是重要的，注意不要和习惯的数字运算相混淆：(1) 矩阵的乘法一般没有交换律；(2) 矩阵有零因子，即当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 时，有可能 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$(或者说当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时 $\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$)；(3) 矩阵没有消去律，即当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时 $\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

关于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\cdots$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}.$$

关于对角矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&0&0\\0&a_2b_2&0\\0&0&a_3b_3\end{bmatrix}.$$

(1)$\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2=\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1$.

(2)$\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&0&0\\0&a_2^n&0\\0&0&a_3^n\end{bmatrix}$.

(3)$\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&\\&\frac{1}{a_2}&\\&&\frac{1}{a_3}\end{bmatrix}(a_i\neq 0)$.

关于 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}$.

如 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm T}$,

则 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}=[b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_2b_1&a_3b_1\\a_1b_2&a_2b_2&a_3b_2\\a_1b_3&a_2b_3&a_3b_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta}=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2^2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3^2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

【注】 (1) 如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=1$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

(3) $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是平方和.

练习 2.1

若 $\boldsymbol{\alpha}=[1,3,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[1,2,-1]^{\mathrm{T}}$，则

(1) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}[1,2,-1]=$ ________.　　(2) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}[1,3,2]=$ ________.

(3) $[1,2,-1]\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=$ ________.　　(4) $[1,3,2]\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=$ ________.

(5) $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}[1,3,2]=$ ________.　　(6) $[1,2,-1]\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=$ ________.

（练习答案在 297 页）

定义（转置） 将 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的行列互换得到的 $n\times m$ 矩阵 $[a_{ji}]_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\text{则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

定义（矩阵多项式） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的多项式，则称

$$a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$$

为矩阵多项式，记为 $f(\boldsymbol{A})$.

运算法则

(1) **加法**　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，则

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$　　交换律

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$　　结合律

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$　其中 $\boldsymbol{O}$ 是元素全为零的同型矩阵

$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

(2) **数乘矩阵**

$k(m\boldsymbol{A})=(km)\boldsymbol{A}=m(k\boldsymbol{A})$；$(k+m)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{A}$

$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(3) **乘法** $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足运算条件时

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$
$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$$

(4) **转置**

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}};(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}};(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

例 1 若 $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}-\boldsymbol{X}+\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}[2,0,-1]=3\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{X}=$ ______.

【分析】 $$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}[2,0,-1]-3\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&-1\\4&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\6&6&0\\9&9&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&-1&4\\-2&-1&0\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$,则

(1)$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=$ ______; (2)$(\boldsymbol{AB})^2=$ ______; (3)$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=$ ______.

【分析】 (1)$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&2\\-3&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-2\\3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\-6&0\end{bmatrix}.$$

(2)$$(\boldsymbol{AB})^2=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}1&2\\-3&-4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-5&-6\\9&10\end{bmatrix}.$$

(3)$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}.$$

例 3 方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\2x_1-x_2+x_3+x_4=1\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=5\end{cases}$$

用矩阵可以表示为

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&-1&1&1\\1&7&-4&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}.$$

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&-1&1&1\\1&7&-4&11\end{bmatrix}$ 称为方程组系数矩阵,未知数 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$,常数

项 $\boldsymbol{b}=[2,1,5]^{\mathrm{T}}$，则方程组表示为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

如果对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$.

由分块矩阵乘法，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{b}$.

那么用向量的语言：方程组问题就可转换为向量 $\boldsymbol{b}$ 由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出的问题.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量.

证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

【证】 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$

$=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1)\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$

因为 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$.

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1)\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

3. 常见的矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵.

(1) **单位阵**：主对角元素为 1，其余元素为 0 的矩阵称为单位阵，记成 $\boldsymbol{E}_n$.

(2) **数量阵**：数 k 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的积 $k\boldsymbol{E}$ 称为数量阵.

(3) **对角阵**：非对角元素都是 0 的矩阵(即 $\forall i\neq j$ 恒有 $a_{ij}=0$) 称为对角阵，记成 $\boldsymbol{\Lambda}$. $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

(4) **上(下) 三角阵**：当 $i>j(i<j)$ 时，有 $a_{ij}=0$ 的矩阵称为上(下) 三角阵.

(5) **对称阵**：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}$ 的矩阵称为对称阵.

(6) **反对称阵**：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji},a_{ii}=0$ 的矩阵称为反对称阵.

练习 2.2

(1) $[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=$ ________.

(2) $[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=$ ________.

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$，若 $f(x)=2x^2-5x+3$，则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(练习答案在 297 页)

二、伴随矩阵、可逆矩阵

1. 伴随矩阵的概念与公式

伴随矩阵：由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 所有的代数余子式所构成的形如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，则计算代数余子式，得

$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=6, A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4, A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2,$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5, A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0, A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=5,$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3, A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-8, A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1,$

按定义 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -8 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

伴随矩阵的公式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\quad(|\boldsymbol{A}|\neq 0)$$

$$(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$$

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}\quad(n\geqslant 2)$$

2. 可逆矩阵的概念与定理

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}(\text{单位矩阵})$$

成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记成 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

定理 2.1 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

定理 2.2 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

定理 2.3 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件

(1) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$).

(2) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，或秩 $r(\boldsymbol{A})=n$，或 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量线性无关.

(3) 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.
(4) $\forall \boldsymbol{b}$,非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 总有唯一解.
(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0.

4. **逆矩阵的运算性质**

若 $k\neq 0$,$\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$;若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,特别地 $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2$;

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆,则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

注意 即使 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆,一般地 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

5. **求逆矩阵的方法**

方法一 用公式,若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

方法二 初等变换法 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})$.

方法三 用定义求 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

方法四 用分块矩阵.

设 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 都是可逆矩阵,则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

例 5 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

【分析】 用行变换 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\to(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1})$ 的方法:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

【注】 非常重要的基础计算,必须动手做题,千万别大意!

例 6　设 $A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，则 $A^*=$ ________.

【分析】　对 A 分块

$$A=\left[\begin{array}{c:ccc}0 & a_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ \hdashline a_n & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}O & A_1\\ A_2 & O\end{bmatrix}$$

则 $|A|=(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$

A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}\prod a_i\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}.$$

【注】　这里用到了

$$\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & B^{-1}\\ A^{-1} & O\end{bmatrix};\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}.$$

例 7　(1995，数三) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$ ________.

【分析】　因 $AA^*=|A|E$，有 $\frac{1}{|A|}A\cdot A^*=E$

即$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$

现$|A|=10$

$$\therefore (A^*)^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}.$$

例 8 设$\alpha=\left(\dfrac{1}{2},0,\cdots,0,\dfrac{1}{2}\right)^T$是$n$维列向量，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E+a\alpha\alpha^T$，若$B$是$A$的逆矩阵，则$a=$________

【分析】 $AB=(E-\alpha\alpha^T)(E+a\alpha\alpha^T)=E+a\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-a\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$
$=E+(a-1-a\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$

又$\alpha^T\alpha=\left(\dfrac{1}{2},0,\cdots,0,\dfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}$，故$AB=E+(a-1-\dfrac{1}{2}a)\alpha\alpha^T=E$.

$\Leftrightarrow(\dfrac{1}{2}a-1)\alpha\alpha^T=O$，所以$a=2$.

例 9 A是n阶矩阵满足$A^2-3A-2E=O$，则$(A+E)^{-1}=$________.

【分析】 本题矩阵A没有具体元素，应考虑用定义法：

由 $$(A+E)(A-4E)+2E=A^2-3A-2E=O$$
即 $$(A+E)(A-4E)=-2E$$
即 $$(A+E)\cdot\frac{1}{2}(4E-A)=E$$
故 $$(A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(4E-A).$$

例 10 设AB都是3阶矩阵，且$AB=2A+B$，若$B=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，则$(A-E)^{-1}=$________.

【分析】 由$AB=2A+B$，有

$$AB-B-2A+2E=2E,\text{即}(A-E)(B-2E)=2E.$$

故$(A-E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(B-2E)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

例 11 (2001，数二) 已知$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，矩阵$X$满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E$$

则 $X =$ ________.

【分析】
$$AXA + BXB - AXB - BXA = E$$
$$(A-B)XA - (A-B)XB = E$$
$$(A-B)X(A-B) = E$$
$$X = [(A-B)^{-1}]^2 = \left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right)^2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例12 设 $f(x) = x^{100} + x^{99} + \cdots + x + 1$，
$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
求 $f(A)$ 和 $f(A)^{-1}$.

【分析】 因 $A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，又
$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = A^2.$$

知 $A^m = A^2$（当 $m \geqslant 2$ 时），故
$$\begin{aligned}f(A) &= A^{100} + \cdots + A^2 + A + E = 99A^2 + A + E\\&= \begin{bmatrix}99 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}101 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$
$$f(A)^{-1} = \begin{bmatrix}101 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{101} & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例13 A 是 n 阶可逆矩阵，证明非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解 $A^{-1}b$.

【证】 先证 $Ax = b$ 有解.

因为
$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b$$
所以 $A^{-1}b$ 是方程组的解，故方程组 $Ax = b$ 有解.

再证唯一性，设 α 是 $Ax = b$ 的任一个解，则 $A\alpha = b$. 那么
$$A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}b$$
$$(A^{-1}A)\alpha = A^{-1}b$$
$\Rightarrow \alpha = A^{-1}b$，即 $Ax = b$ 的解唯一.

【注】 以三元一次方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2\\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\end{cases}$$

为例，注意到：唯一解 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$x_1=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix};$$

x_2,x_3 下略．这就是克拉默法则的矩阵法证明吧！

练习 2.3

(1)(1991，数一)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则必有

(A)$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$.　　(B)$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$.

(C)$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$.　　(D)$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

(2) 已知 $\begin{bmatrix}1&-5\\-1&4\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=$ ________.

(3)(1995，数一) 已知 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$ ________.

(4) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

(练习答案在 297 页)

三、初等变换、初等矩阵

1. 初等变换与初等矩阵的概念

定义 (初等变换)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，

(1) 用某个非零常数 $k(k\neq 0)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的某行(列) 的每个元素；

(2) 互换 $\boldsymbol{A}$ 的某两行(列) 的位置；

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某行(列) 元素的 k 倍加到另一行(列)，

称为矩阵的三种初等行(列)变换，且分别称为初等**倍乘**、**互换**、**倍加**行(列)变换，统称**初等变换**.

定义（初等矩阵） 由单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，它们分别是(以 3 阶为例).

(1) **倍乘初等矩阵**，记 $\boldsymbol{E}(i(k))$.

$$\boldsymbol{E}(2(k))=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}(2(k))$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第二行(或第二列) 乘 $k(k\neq 0)$ 倍得到的矩阵.

(2) **互换初等矩阵**，记 $\boldsymbol{E}(i,j)$.

$$\boldsymbol{E}(1,2)=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}(1,2)$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一，二行(或一，二列) 互换得到的矩阵.

(3) **倍加初等矩阵**，记 $\boldsymbol{E}(ij(k))$.

$$\boldsymbol{E}(13(k))=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}(13(k))$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一行的 k 倍加到第三行得到的矩阵. 当看成列变换时，应是 $\boldsymbol{E}$ 的第三列的 k 倍加到第一列得到的矩阵.

定义（等价矩阵） 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记成 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{A}\cong\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则后者称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.($\boldsymbol{A}$ 的等价标准形是与 $\boldsymbol{A}$ 等价的所有矩阵中的最简矩阵).

2. 初等矩阵与初等变换的性质

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 初等矩阵均是可逆阵，且其逆矩阵仍是初等矩阵.

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j);\boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);\boldsymbol{E}(ij(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(ij(-k))$$

(3) 用初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘(右乘)$\boldsymbol{A}$，其结果 $\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{AP})$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作相应的初等行(列) 变换.

定理 2.4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积

$$\boldsymbol{P}_t\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

3. 行阶梯矩阵，行最简矩阵

行阶梯矩阵

(1) 如果矩阵中有零行(即这一行元素全是 0)，则零行在矩阵的底部.

(2) 每个非零行的主元(即该行最左边的第 1 个非零元)，它们的列指标随着行指标的递增而严格增大.

例 $\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&1&4\\0&2&5\end{bmatrix}$都不是行阶梯矩阵.

例 $\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&5\\0&0&0&6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3&0&1&-4\\0&0&2&7\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 是行阶梯矩阵.

行最简矩阵

一个行阶梯矩阵，如果还满足：

非零行的主元都是1，且主元所在的列的其他元素都是0，则称其为行**最简矩阵**.

例 $\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 都不是行最简矩阵.

例 $\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 是行最简矩阵.

如 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{行}}\cdots\to\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{P}_t\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_t\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ 有 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

由 $\boldsymbol{P}_t\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{P}_t\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}$ 表明当 $\boldsymbol{A}$ 经行变换得到 $\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 在同样的行变换下得到 $\boldsymbol{P}$，即 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\to(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{P})$.

例 14 (1995，数一) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则必有

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【分析】 观察到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过两次初等行变换可得到 $\boldsymbol{B}$，按初等矩阵的性质应该是左乘初等矩阵，排除(A)(B).

$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ 表示先把 $\boldsymbol{A}$ 的第一行加至第三行，然后再一、二两行互换，这正是矩阵 $\boldsymbol{B}$，所以应当选(C).

而 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 表示先把 $\boldsymbol{A}$ 的一、二两行互换，然后再把第一行加至第三行，那么这时的矩阵是

$$\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{21}&a_{32}+a_{22}&a_{33}+a_{23}\end{bmatrix}$$

例 15 已知 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的1，3两行互换得到 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第2列的 -1 倍加到第3列得到 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}7&8&1\\4&5&1\\1&2&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

【分析】 由已知

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$BP_2 = C, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_1AP_2 = C$

$$A = P_1^{-1}CP_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

例16 已知$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$,化其为行最简矩阵$F$,并求一个可逆矩阵$P$使$PA = F$.

【解】 对矩阵A作初等行变换

$$(A, E) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

矩阵A的行最简矩阵$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$有$PA = F$.

例17 已知矩阵$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$和矩阵$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$等价,则$a =$ ________.

【分析】 A和B等价$\Leftrightarrow A$经初等变换得到矩阵B

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆矩阵P和Q使$PAQ = B$

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

明显$r(B) = 2$.

而 $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

当 $a = 1$ 时，$r(A) = 1$.

当 $a = -2$ 时，A 中 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$，而 $|A| = 0$，从而 $r(A) = 2$

$\therefore A$ 和 B 等价 $\Leftrightarrow a = -2$.

练习 2.4

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ ______.

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ ______.

(3) 设 A 是 3 阶矩阵，把 A 的二，三两列互换得到 B，把 B 的第三行的 -1 倍加到第一行得到 C，若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $C =$ ________.

(4) 将 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ 化为行最简矩阵.

（练习答案在 297 页）

四、分块矩阵

1. 分块矩阵的概念

将矩阵用若干纵线和横线分成许多小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵（或子块），把子块看成原矩阵的一个元素，则原矩阵叫分块矩阵.

由于不同的需要，同一个矩阵可以用不同的方法分块，构成不同的分块矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$，$i=1,2,\cdots,m$，是 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，$\boldsymbol{A}$ 是以行分块的分块阵.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_j=[b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj}]^{\mathrm{T}}$，$j=1,2,\cdots,n$，是 $\boldsymbol{B}$ 的子矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是以列分块的分块阵.

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_3=\begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_4=\begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{C}$ 的子矩阵.

2. 分块矩阵的运算

对矩阵适当地分块处理(要保证相对应子块的运算能够合理进行)，就有如下运算法则：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BW} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DW} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 s 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^n \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

例 18 已知 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，证明$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$可逆，且

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix}$$

【证】 由 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均可逆，有$\begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|\neq 0$，所以$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$可逆.

设$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

即$\begin{cases} BX = E & (1) \\ BY = O & (2) \\ CZ = O & (3) \\ CW = E & (4) \end{cases}$

由(1)有 $X = B^{-1}$.

由(2),因 B 可逆,有 $Y = B^{-1}O = O$.

类似地 $Z = O, W = C^{-1}$.

所以$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$.

例如$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

因为$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

例 19　已知 $X = ABA$,其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $X =$ ________.

【分析】　把 A, B 各分成四个 2×2 的小矩阵,即

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix}, B = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} O & C \\ C & O \end{bmatrix}$$

由于 $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E$,就有

$$X = \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & C \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & C \\ -C & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E & O \\ O & -2E \end{bmatrix}$$

即 $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

五、方阵的行列式

抽象 n 阶方阵行列式公式

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；
3. (行列式乘法公式) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；
特别地 $|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}|^2$.
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；
5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；
6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|;$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

【注】 一般情况 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$，$|k\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|$.

例 20 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

【分析】 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}|^{n-1}|\boldsymbol{B}|^{-1}=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

本题用到的公式依次是

$$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|,\ |\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\ |\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1},\ |\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}.$$

例 21 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，如果 $|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{2}{3}$，则 $|3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}^{-1}|=$ ________.

【分析】 因 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，又 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-\dfrac{3}{2}$，则有

$$\begin{aligned}|3\boldsymbol{A}^*+4\boldsymbol{A}^{-1}|&=|-2\boldsymbol{A}^{-1}+4\boldsymbol{A}^{-1}|=|2\boldsymbol{A}^{-1}|\\&=2^4|\boldsymbol{A}^{-1}|=-3\times2^3=-24.\end{aligned}$$

练习 2.5

(1) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^*|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=5$，则 $\left|\boldsymbol{A}^*-\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=$ ________.

(练习答案在 297 页)

第三章　向量

本章考点

向量的概念 向量的线性组合与线性表示 向量组的线性相关与线性无关 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系 向量的内积 线性无关向量组的正交规范化方法 施密特(Schmidt) 方法

数一还有向量空间，可参看《复习全书(提高篇)》或《线性代数辅导讲义》相关内容.

向量是初学线性代数时的一个难点，主要表现在对定义的理解、语言的表述、逻辑推理的合理性等方面. 当然也是考研的重点.

一、向量的概念、向量组的概念

定义 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}} \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

叫做 n **维向量**，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**分量**(或**坐标**)，前一个表示式称为**列向量**，后者称为**行向量**.

相等　$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 同维，且对应分量 $a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$.

向量的基本运算

加法　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.

数乘　$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

若干个同维数的行向量(或同维数的列向量) 所组成的集合叫做**向量组**.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$(其中 $s\geqslant r$)，称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的 **部分组**，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 **整体组**.

向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm}]^{\mathrm{T}}$$

及

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}]^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm},\cdots,a_{sm}]^{\mathrm{T}}$$

其中 $s\geqslant r$，则称 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的 **延伸组**(或称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的 **缩短组**).

二、线性表出、线性相关

定义 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 及 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，则向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

若 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ **能由** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表出**.

定义 对 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**，否则称它们**线性无关**.

显然含有零向量，相等向量或成比例向量的向量组是线性相关的；单个向量时，零向量是线性相关的.

m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，下面几种表述等价：

对任意不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，均有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$$

当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

成立.

不存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

成立.

向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,0,1)$ 是线性无关的，单个向量是非零向量时，是线性无关的；两个向量不成比例时，是线性无关的.

定理 3.1 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

$\Leftrightarrow\exists$ 实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$.

$\Leftrightarrow$ 方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$.

定理 3.2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,m)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为列向量的齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0\end{cases}$$

有非零解.

推论 1 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$.

推论 2 任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 3.3 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 相关 $\Rightarrow$ 整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 相关，整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 无关 $\Rightarrow$ 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 无关，反之都不成立.

[$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$(其中 $s>r$)，称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是整体组.]

定理 3.4 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性无关；

$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，反之均不成立.

［向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}]^T,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm}]^T$ 及 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}]^T,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}]^T,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm},\cdots,a_{sm}]^T$，其中 $s\geqslant r$，则称 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的延伸组（或称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的缩短组）］

定理 3.5 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由其余向量线性表出.

定理 3.6 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表出法唯一.

定理 3.7 设有两个向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$

(1) 若 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均可由（Ⅰ）线性表出，且 $t>s$，则（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关.

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均可由（Ⅰ）线性表出，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，则 $t\leqslant s$.

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,1)^T,\boldsymbol{\beta}=(2,5,t)^T$，问 t 取何值时，(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出此表达式.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，按分量写出有

$$x_1(1,2,3)^T+x_2(1,3,4)^T+x_3(2,-1,1)^T=(2,5,t)^T$$

即

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=2\\2x_1+3x_2-x_3=5\\3x_1+4x_2+x_3=t\end{cases}$$

作初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&2\\2&3&-1&5\\3&4&1&t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&2\\0&1&-5&1\\0&1&-5&t-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&2\\0&1&-5&1\\0&0&0&t-7\end{array}\right],$$

(1) 当 $t\neq 7$ 时，方程组无解，即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 当 $t=7$ 时，方程组有解

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&2\\0&1&-5&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&7&1\\0&1&-5&1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

令 $x_3=t$ 得 $x_2=1+5t,x_1=1-7t$，所以 $\boldsymbol{\beta}=(1-7t)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+5t)\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$，$t$ 为任意常数.

例 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+\lambda,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+\lambda,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+\lambda)^T,\boldsymbol{\beta}=(0,\lambda,\lambda^2)^T$，当 λ 取什么值时：(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并写出该表示式.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，按分量写出得方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$$

由 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & \vdots & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \vdots & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \vdots & \lambda^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & \vdots & 0\\ -\lambda & \lambda & 0 & \vdots & \lambda\\ -\lambda & 0 & \lambda & \vdots & \lambda^2\end{bmatrix}$,

若 $\lambda=0$,同解方程组

$$x_1+x_2+x_3=0$$

令 $x_2=t,x_3=u$ 得 $x_1=-t-u$.

故 $\boldsymbol{\beta}=-(t+u)\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2+u\boldsymbol{\alpha}_3$,$t,u$ 是任意常数.

若 $\lambda\neq 0$,

$$\overline{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & \vdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda+3 & 0 & 0 & \vdots & -\lambda-1\\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda\end{bmatrix}$$

若 $\lambda=-3$,方程组无解,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

若 $\lambda\neq-3$,解出

$$x_1=-\frac{\lambda+1}{\lambda+3},x_2=\frac{2}{\lambda+3},x_3=\frac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}$$

故 $\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{2}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 3 已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 都是 n 维向量,试证如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表出,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表出.

【证】 据已知条件,可设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3\\ \boldsymbol{\beta}_1&=l_{11}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{12}\boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2&=l_{21}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{22}\boldsymbol{\gamma}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3&=l_{31}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{32}\boldsymbol{\gamma}_2\end{aligned}$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}=k_1(l_{11}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{12}\boldsymbol{\gamma}_2)+k_2(l_{21}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{22}\boldsymbol{\gamma}_2)+k_3(l_{31}\boldsymbol{\gamma}_1+l_{32}\boldsymbol{\gamma}_2)$

$=(k_1l_{11}+k_2l_{21}+k_3l_{31})\boldsymbol{\gamma}_1+(k_1l_{12}+k_2l_{22}+k_3l_{32})\boldsymbol{\gamma}_2$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表出.

例 4 判断向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,-5,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,5,3,5)$$

的线性相关性.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,按分量写出

$$x_1(1,2,-1,4)+x_2(0,-1,-5,3)+x_3(2,5,3,5)=(0,0,0,0)$$

即有
$$\begin{cases}x_1 \qquad +2x_3=0\\ 2x_1-x_2+5x_3=0\\ -x_1-5x_2+3x_3=0\\ 4x_1+3x_2+5x_3=0\end{cases}$$

对系数矩阵作初等变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 5\\ -1 & -5 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由 $r(\boldsymbol{A}) < n$，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 5 判断向量组的线性相关性

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,4,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,-7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,2,4)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (3,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (5,6)^{\mathrm{T}}$.

【解】 已知向量的坐标，判断向量组的线性相关就是转化为齐次方程组考查有无非零解.

(1) 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$. 按分量写出，即

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

齐次方程组必有非零解，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，按分量写出，有

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

由 $r(\boldsymbol{A}) < n$ 齐次方程组必有非零解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关.

例 6 (1) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,a,3)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，求 a.

(2) 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,3,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,a,1)^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性.

【解】 (1) n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & a \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4(3-a),$$

所以 $a = 3$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，按分量写出. 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵作初等行变换有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

可见 $a = 1$ 时，秩 $r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 当 $a \neq 1$ 时，秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 7 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$ 均是 n 阶矩阵，记向量组

（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，（Ⅱ）：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，（Ⅲ）$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，

若（Ⅲ）线性相关，则

(A)（Ⅰ）（Ⅱ）均线性相关.　　(B)（Ⅰ）或（Ⅱ）至少有一个线性相关.

(C)（Ⅰ）必线性相关.　　(D)（Ⅱ）必线性相关.

【分析】（Ⅲ）线性相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{AB}|=0$

$$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{B}|=0$$

所以应选(B).

例 8 （1997，数三）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$.

【分析】 由观察法

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$.

(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$.

知(A)(B)均线性相关，然后可用秩继续分析

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

则 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix},$$

由 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq 0$，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，

于是 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}]=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，

从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性无关，即(C)必线性无关.

关于(D)，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{bmatrix},$$

因 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{vmatrix}=0$，$r(\boldsymbol{C})=2$，那么 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}]\leqslant r(\boldsymbol{C})=2$.

可推断出(D)线性相关.

例 9 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【证】 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$ 知矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 可逆.

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，从而 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

或者，设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$

即
$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 故

$$\begin{cases}k_1\qquad\ +k_3=0\\k_1+k_2\qquad\ =0\\\qquad k_2+k_3=0\end{cases}\tag{*}$$

由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$，得齐次方程组(*)只有零解，即必有 $k_1=0,k_2=0,k_3=0$.

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性无关.

例10 证明定理：如果 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出且表示法唯一.

【证】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s,k$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

如果其中 $k=0$. 那么必有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0，而

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

这与已知条件 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关相矛盾. 所以必有 $k\neq 0$，那么

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k}\right)\boldsymbol{\alpha}_s$$

即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表示法，设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$$
$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

两式相减，得

$$(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_s-y_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

因为是两种不同的表示法，x_i-y_i 不可能全为 0，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，与已知条件矛盾. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示法唯一.

例11 证明定理：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其余的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

【证】 必要性

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

不妨设 $k_1\neq 0$，则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1=-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_s$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

充分性

如果 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

即有
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \boldsymbol{\alpha}_i + k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

组合系数 $k_1,\cdots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\cdots,k_s$ 不全为 0,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

例 12 证明定理:设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 m 维向量,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 n 维向量. 令 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{bmatrix}$,那么

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 必线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关.

【证】 构造两个齐次方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (\mathrm{I})$$

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_s\end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (\mathrm{II})$$

即 $\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} & (\mathrm{I})\\ (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} & (\mathrm{III})\end{cases}$

由于(Ⅱ)的前 m 个方程就是(Ⅰ)的所有方程,于是

$$\{(\mathrm{II})\text{ 的解}\} \subset \{(\mathrm{I})\text{ 的解}\}.$$

(1) 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关时,(Ⅰ)只有零解,因此(Ⅱ)也仅有零解,故 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 必线性无关.

(2) 当 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 线性相关时,(Ⅱ)有非零解,因此(Ⅰ)必有非零解,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定线性相关.

练习 3.1

(1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,a,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,7,2)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,则 $a =$ ________.

(2) 已知 $\boldsymbol{\beta} = (1,-4,a)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (4,-1,-6)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,则 $a =$ ________.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组中线性无关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(练习答案在 297 页)

三、向量组的秩、矩阵的秩

1. 向量组的秩

定义 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}(1\leqslant i_r\leqslant s)$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组，满足条件

(1)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关；

(2)$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 中加入任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant s)$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**极大线性无关组**.

条件(2) 的等价说法是：向量组中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

向量组的极大无关组一般不唯一，但极大无关组的向量个数是一样的. 只有一个零向量组成的向量组没有极大线性无关组，一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组本身.

向量组的极大线性无关组的向量个数称为**向量组的秩**，记为$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

定义 设向量组

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s;\quad (\mathrm{II})\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,$$

若(Ⅰ)中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\cdots,s$，均可由(Ⅱ)线性表出，则称(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出；若向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)可以相互表出，则称向量组(Ⅰ)、(Ⅱ)是**等价向量组**，记成(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ).

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组.

一个向量组中各极大无关组之间是等价向量组，且向量个数相同.

定理 3.8 如果向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出，则 $r(\mathrm{I})\leqslant r(\mathrm{II})$.

推论 如果向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价，则 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

例13 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-1,5,2)^{\mathrm{T}}$ 的极大线性无关组是________.

【分析】 列向量作初等行变换化为阶梯形，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&-1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)$$

此时每行第 1 个非 0 数在第一，二，四列，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组.

【注】 由$(3,1,0,0)^{\mathrm{T}}=3(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}+(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$

$(2,1,2,0)^{\mathrm{T}}=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}+2(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$

即 $\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_4$，故知 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_4$.

于是用极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 表示出 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_5$.

例14 向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；(Ⅲ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$. 若秩 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3,r(\mathrm{III})=4$. 则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=$________.

【分析】 由$r(\mathrm{I})=3$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，

$r(\mathrm{II})=3$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，

故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 可以互相线性表示，即向量组等价.

所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

或设 $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_5)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{bmatrix}1&0&0&k_1\\0&1&0&k_2\\0&0&1&k_3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由于矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0&k_1\\0&1&0&k_2\\0&0&1&k_3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 可逆,故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

练习 3.2

(1) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是________.

(2) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,2,3,a)^{\mathrm{T}}$,其中 a 是参数.求该向量组的秩与一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

(练习答案在 297 页)

2. 矩阵的秩

定义 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,任取 k 行与 k 列($k\leqslant m,k\leqslant n$),位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的次序可构成一个 k 阶行列式,称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

定义(矩阵的秩) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 中存在 r 阶子式不等于零,r 阶以上子式均等于零,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,记成 $r(\boldsymbol{A})$,零矩阵的秩规定为 0.

秩 $r(\boldsymbol{A})=r\Leftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数是 r.

$r(\boldsymbol{A})<r\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 中每一个 r 阶子式全为 0.

$r(\boldsymbol{A})\geqslant r\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0.

特别地,$r(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,

$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 可逆.

$r(\boldsymbol{A})<n\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 不可逆.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,n)$.

定理 3.9 经初等变换矩阵的秩不变.

矩阵秩的公式

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$;$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

当 $k \neq 0$ 时，$r(k\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$；$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$，

$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$，$\max(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})) \leqslant r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{B})$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

分块矩阵 $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$.

定理 3.10（三秩相等）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 以行及列分块，得

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n]$$

则有 $r(\boldsymbol{A})$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩）$= r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$（$\boldsymbol{A}$ 的行秩）$= r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$（$\boldsymbol{A}$ 的列秩）.

例如：矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 全为 0. 故 $r(\boldsymbol{A}) = 2$.

$\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$，极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 2$.

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,-1,3)$，$\boldsymbol{\beta}_2 = (0,0,1,5)$，$\boldsymbol{\beta}_3 = (0,0,0,0)$，极大无关组是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2$.

例 15　（1）已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$，则 $a =$ ________.

（2）设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$，且秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$，则 $k =$ ________.

【分析】（1）经初等变换矩阵的秩不变，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & a & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$$ 可见 $a = 2$ 时，秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

(2) 由 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$

若 $k=1$ 知 $r(\boldsymbol{A})=1$,故 $k=-3$.

例16 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 证明 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$.

【证】 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}(m$ 阶$)$

有 $\quad m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A}) \qquad (1)$

又 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,有 $r(\boldsymbol{A})\leqslant m \qquad (2)$

比较(1)(2),得 $r(\boldsymbol{A})=m$

类似地,$r(\boldsymbol{B})=m$.

例17 已知向量组

$$(\text{Ⅰ})\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \text{ 和}(\text{Ⅱ})\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$$

若(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示. 证明

(1)r(Ⅰ)$\leqslant r$(Ⅱ).

(2) 若 $s>t$,则(Ⅰ)必线性相关.

【证】 (1) 因(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=c_{11}\boldsymbol{\beta}_1+c_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{t1}\boldsymbol{\beta}_t$

$\cdots$

$\boldsymbol{\alpha}_s=c_{1s}\boldsymbol{\beta}_1+c_{2s}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{ts}\boldsymbol{\beta}_t$

即存在矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$,使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{C}$$

那么
$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) &= r[(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{C}] \\ &\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t) \end{aligned}$$

即 r(Ⅰ)$\leqslant r$(Ⅱ).

(2) 若 $s>t$,则

$$r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\leqslant t<s$$

$\therefore \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关.

练习 3.3

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩

(A) 必有一个等于 0. (B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n,一个等于 n. (D) 都等于 n.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$. 若 $r(\boldsymbol{B})=r_1$,则

(A)$r=r_1$. (B)$r<r_1$.

(C)$r>r_1$. (D)r 和 r_1 关系与 $\boldsymbol{C}$ 有关.

(练习答案在 297 页)

四、正交规范化、正交矩阵

1. 内积

定义 设有 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，令

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

则称 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

内积满足下列性质

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$（对称性）；

(2) $\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta})$（线性性）；

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$（线性性）；

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$（正定性）.

定义 设 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的模（长度），$|\boldsymbol{\alpha}|=1$ 时称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量.

定义 两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 夹角的余弦为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$$

当 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$ 时，则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$，$(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=\frac{\pi}{2}$，此时称向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交.

2. 施密特正交化

施密特（Schmidt）标准正交化方法

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，其标准正交化的方法如下（又称正交规范化）：

先正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是正交向量组.

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化. 取

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|},$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是标准正交向量组，即有 $(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j)=\begin{cases}0,i\neq j\\1,i=j\end{cases}$.

3. 正交矩阵

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

定理 3.11 如 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量都是单位向量且两两正交

例 18 与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量是________.

【分析】 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交，则

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)=x_1+3x_2+2x_3=0\\(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)=x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&2\end{bmatrix}$$

得 $\alpha=(4,-2,1)^{\mathrm{T}}$，再单位化有 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{21}}(4,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 为所求.

例19 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是两两正交的非零向量.

证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【证】 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 两两正交，即 $\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$，用 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 左乘(1)式两端，得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1\neq0$，从而必有 $k_1=0$.

类似可证 $k_2=0,\cdots,k_s=0$. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例20 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,3)^{\mathrm{T}}$，试用施密特正交化将这组向量正交规范化.

【解】 先正交化

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$$

再单位化 $\quad\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$

第四章　线性方程组

本章考点

线性方程组有解和无解的判定 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组（导出组）的解之间的关系 线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的通解

一、基本概念

我们称

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (\text{Ⅰ})$$

是 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个未知数，而 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是不全为 0 的常数.

利用矩阵乘法，方程组（Ⅰ）可表示为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

于是方程组（Ⅰ）的矩阵形式：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为方程组（Ⅰ）的系数矩阵.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则方程组（Ⅰ）有向量形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}, j=1,2,\cdots,n, \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

如果 $\forall j=1,2,\cdots,m$ 恒有 $b_j=0$，则称

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

为**齐次线性方程组**（也称（Ⅱ）是（Ⅰ）的**导出组**）. 其矩阵形式为：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$$

而齐次方程组（Ⅱ）的向量形式，则是

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$$

若将一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 分别代替方程组(Ⅰ)(或(Ⅱ))中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使(Ⅰ)(或(Ⅱ))中 m 个等式都成立,则称 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组(Ⅰ)(或(Ⅱ))的一个**解**.

解方程组就是要求出方程组的所有的解.

求方程组的解就是要对所给方程组作同解变形,而同解变形的方法:

(1) 两个方程互换位置;

(2) 用非零常数乘方程的两端;

(3) 把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

同解变形所对应的矩阵语言就是矩阵的**初等行变换**.

二、齐次线性方程组

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

易见 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 必满足每一个方程.故 $(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 一定是齐次线性方程组的一个解,称其为**零解**.除去零解之外,如果齐次方程组还有其他的解.那些解就称为**非零解**.

基础解系 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,而且满足

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关,

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任一个解 $\boldsymbol{\eta}$ 都可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出,

则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

解的性质 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解,则对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$,

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\eta}_t$$

仍是该齐次方程组的解.

定理 4.1 齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

推论 1. 当 $m<n$ 时,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 必有非零解.

2. 当 $m=n$ 时,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$.

定理 4.2 如齐次线性方程组(Ⅱ)系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$,则(Ⅱ)有 $n-r$ 个线性无关的解,且(Ⅱ)的任一个解都可由这 $n-r$ 个线性无关的解线性表出(即(Ⅱ)的基础解系由 $n-r$ 个解向量构成).

定理 4.3 若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次方程组(Ⅱ)的基础解系,则(Ⅱ)的通解是 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t$,$k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

例 1 求齐次方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

【解】 对系数矩阵作初等行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&4&-3\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-8&7\\0&1&6&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得同解方程组：

$$\begin{cases}x_1\quad-8x_3+7x_4=0\\ \quad x_2+6x_3-5x_4=0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=8x_3-7x_4\\x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}$$

令$x_3=1,x_4=0\Rightarrow x_2=-6,x_1=8$,

$x_3=0,x_4=1\Rightarrow x_2=5,x_1=-7$,

故基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(8,-6,1,0)^T,\boldsymbol{\eta}_2=(-7,5,0,1)^T$.

通解是：$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,k_1,k_2$ 是任意常数.

或者，令 $x_3=t,x_4=u$，得通解：

$$\begin{cases}x_1=8t-7u\\x_2=-6t+5u\\x_3=t\\x_4=u\end{cases}$$

亦即 $\boldsymbol{x}=t\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$，基础解系为：$\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$.

例 2　求齐次方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-7x_3+5x_4=0\\x_1-2x_2-5x_3-2x_4=0\\x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\end{cases}$$

的通解.

【解】　对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-7&5\\1&-2&-5&-2\\1&1&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\1&-2&-5&-2\\2&-1&-7&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&-3&-3&0\\0&-3&-3&9\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\&1&1&0\\&&&1\end{bmatrix}$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1\quad-3x_3\quad=0\\ \quad x_2+x_3\quad=0\\ \qquad\qquad x_4=0\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=3x_3\\x_2=-x_3\\x_4=0\end{cases}$$

令 $x_3=1\Rightarrow x_4=0,x_2=-1,x_1=3$.

故基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(3,-1,1,0)^T$.

通解为：$k\boldsymbol{\eta}$，k 为任意常数.

或者，令 $x_3=t$，解出

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

亦即 $\boldsymbol{x} = t(3,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

【注】 如何加减消元?怎样求解?要重视这里的基本计算.

对自由变量既可以用(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)来赋值,也可用 t,u,v.

例 3 要使 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{A}$ 可以为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.
(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.
(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

【分析】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有2个线性无关的解,于是 $n - r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$. 即知 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 1$,可排除(B)(D).

下面应排查 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是不是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 由在(C)中

$$\boldsymbol{A\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是(C)的解. 故应选(A).

例 4 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系

(A) 不存在.
(B) 有一个非零解.
(C) 有2个线性无关的解.
(D) 有3个线性无关的解.

【分析】 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解所构成. 因 $\boldsymbol{A}$ 是 5×4 矩阵,于是

$$4 - r(\boldsymbol{A}) = 2,$$

那么 $r(\boldsymbol{A}) = 2$,于是 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A}) = 2$.

又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4×5 矩阵,从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由

$$5 - r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = 5 - 2 = 3$$

个线性无关的解所构成,故应选(D).

练习 4.1

(1) 齐次方程组 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$ 的基础解系是________.

(2) 齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是________.

(3) 设 A 是 4×5 矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次方程组 $A^Tx=0$ 的基础解系，则秩 $r(A)=$

(A)4. (B)3. (C)2. (D)1.

(4) 求齐次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\x_1-x_2+4x_3-x_4=0\\4x_1-2x_2+12x_3-2x_4-3x_5=0\end{cases}$ 的通解.

(练习答案在 297 页)

三、非齐次线性方程组

解的性质 1. 设 ξ_1,ξ_2 是方程组 $Ax=b$ 的两个解，则 $\xi_1-\xi_2$ 是导出组 $Ax=0$ 的解.

2. 设 ξ 是方程组 $Ax=b$ 的解，η 是导出组 $Ax=0$ 的解，k 是任意常数，则 $\xi+k\eta$ 是方程组 $Ax=b$ 的解.

定理 4.4 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

$\Leftrightarrow b$ 可由 A 的列向量线性表出.

$Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\overline{A})$.

【注】 $\overline{A}=[A,b]$ 称为方程组 $Ax=b$ 的**增广矩阵**.

定理 4.5 (解的结构) 设 α 是 $Ax=b$ 的解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，则方程组 $Ax=b$ 的通解为

$$\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

例 5 解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\\2x_1+3x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+2x_3+3x_4+3x_5=4\\4x_1+5x_2+3x_3+2x_4+2x_5=6\end{cases}$$

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\2&3&1&1&-3&0\\1&0&2&3&3&4\\4&5&3&2&2&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\&1&-1&-1&-5&-4\\&&&1&-3&-2\\&&&&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&0&4&4\\&1&-1&0&-8&-6\\&&&1&-3&-2\\&&&&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&0&12&10\\&1&-1&0&-8&-6\\&&&1&-3&-2\\&&&&0&0\end{array}\right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 \quad +12x_5 = 10 \\ x_2 - x_3 \quad -8x_5 = -6 \\ x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases} \tag{*}$$

令 $x_3=0,x_5=0$ 得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解

$$\boldsymbol{\alpha}=(10,-6,0,-2,0)^{\mathrm{T}}$$

对应的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_3 \quad +12x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 \quad -8x_5 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 12x_5 \\ x_2 = x_3 + 8x_5 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases}$$

分别令 $x_3=1,x_5=0$ 和 $x_3=0,x_5=1$ 得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-12,8,0,3,1)^{\mathrm{T}}$$

所以方程组的通解：

$(10,-6,0,-2,0)^{\mathrm{T}}+k_1(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-12,8,0,3,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

或对同解方程组(*)

令 $x_3=t,x_5=u$，解出

$$\begin{cases} x_1 = 10-2t-12u \\ x_2 = -6+t+8u \\ x_3 = t \\ x_4 = -2+3u \\ x_5 = u \end{cases}$$

亦得通解 $\boldsymbol{x}=(10,-6,0,-2,0)^{\mathrm{T}}+t(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+u(-12,8,0,3,1)^{\mathrm{T}}$，$t,u$ 为任意常数.

例 6 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+3x_3+7x_4=7 \\ 9x_1+12x_2+x_3 \quad =7 \end{cases}$$

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 9 & 12 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}x_2+\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3} \\ x_3 = \quad -3x_4+1 \end{cases} \tag{*}$$

令 $x_2=0,x_4=0$，则 $x_1=\frac{2}{3},x_3=1$ 得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{2}{3},0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$.

此时对应的齐次方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}x_4 \\ x_3 = \qquad\quad -3x_4 \end{cases}$$

令 $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{4}{3}, x_3 = 0$；

$x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}, x_3 = -3.$

于是导出组的基础解系是

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \left(-\frac{4}{3},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = \left(\frac{1}{3},0,-3,1\right)^{\mathrm{T}}$$

从而方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2, k_1, k_2 \text{ 是任意实数}$$

或对同解方程组(*)

令 $x_2 = t, x_4 = u$，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}t + \dfrac{1}{3}u \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 - 3u \\ x_4 = u \end{cases}$$

从而有通解 $\boldsymbol{x} = \left(\dfrac{2}{3},0,1,0\right)^{\mathrm{T}} + t\left(-\dfrac{4}{3},1,0,0\right)^{\mathrm{T}} + u\left(\dfrac{1}{3},0,-3,1\right)^{\mathrm{T}}.$

例 7 (1993，数三) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有无穷多解，求 a 的值并求这些解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & a-1 & 3 & a^2-4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(a+1)(4-a)}{2} & a(a-4) \end{array}\right],$$

由于方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant 2.$

故 $a = 4.$

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

令 $x_3 = 0$，得方程组的特解 $\boldsymbol{\alpha} = (0,4,0)^{\mathrm{T}}$，

令 $x_3 = 1$，得导出组的基础解系 $\boldsymbol{\eta} = (-3,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

所以方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\eta}$，$k$ 为任意常数.

例 8 (1995,数一)设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_2+ax_3-ax_4=-1 \\ x_1+2x_2+3x_4=3 \end{cases}$$

问 a 为何值时方程组有解?并在有解时求出方程组的通解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1 \end{array}\right],$$

当 $a=2$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$ 方程组无解.

当 $a\neq 2$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<n$,方程组有无穷多解,

$$\overline{A}\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & \dfrac{a-4}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2-2a}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & \dfrac{7a-10}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2-2a}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2} \end{array}\right],$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{7a-10}{a-2},\frac{2-2a}{a-2},\frac{1}{a-2},0\right)^{\mathrm{T}}+k(-3,0,1,1)^{\mathrm{T}},k \text{ 为任意常数.}$$

例 9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量,且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是________.

【分析】 由 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$,所以方程组的通解形式为 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta}$,现在特解已知可取 $\boldsymbol{\alpha}_1$,下面就是应找出导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解.

因为 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{b},(i=1,2,3)$ 有 $\boldsymbol{A}[2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)]=\boldsymbol{0}$. 即

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解. 于是方程组的通解为 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$,$k$ 是任意常数.

例 10 (2002,数一、二)已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【解】 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关

$$\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\geqslant 3 \qquad (1)$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关

$\Rightarrow r(\boldsymbol{A}) < 4$ (2)

$\therefore r(\boldsymbol{A}) = 3$

$n - r(\boldsymbol{A}) = 4 - 3 = 1$

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta}$

知 $(1,1,1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的一个特解.

又 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + 0\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

知 $(1,-2,1,0)^T$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解

$\therefore \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)^T + k(1,-2,1,0)^T$，$k$ 为任意常数.

【注】 没有方程组一般由秩开始，搞清解的结构再分析推理，把特解、基础解系讲清楚.

练习 4.2

1. 已知方程组 $\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\1 & a & 1\\1 & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 有无穷多解，则 $a =$ ________.

2. 解方程组 $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 0\\x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1\\5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4\end{cases}$.

3. 已知方程组 $\begin{cases}x_1 + x_2 + 2x_3 = a\\3x_1 - x_2 - 6x_3 = a + 2\\x_1 + 4x_2 + 11x_3 = a + 3\end{cases}$.

问 a 为何值时方程组有解？并在有解时求其通解.

（练习答案在 297 页）

四、公共解、同解

请在复习好方程组求解这些基础知识后，再参看《复习全书(提高篇)》或《线性代数辅导讲义》的相关内容.

五、方程组的应用

例11 求和矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$可交换的矩阵.

【解】 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，即

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

即$\begin{bmatrix}x_3&x_4\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&x_1\\0&x_3\end{bmatrix}$，得齐次方程组

$$\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_3\qquad=0\end{cases}\tag{*}$$

令$x_2=1,x_4=0\Rightarrow x_3=0,x_1=0$

$x_2=0,x_4=1\Rightarrow x_3=0,x_1=1$

方程组(*)的通解

$$\boldsymbol{x}=k_1(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\text{ 是任意常数}.$$

故$\begin{bmatrix}k_2&k_1\\0&k_2\end{bmatrix}$与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，k_1,k_2 是任意常数.

例12 若$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}4&5\\5&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=$ ________.

【分析】 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}$，则有

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_1+3x_2+4x_3=5\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1+2y_2+3y_3=5\\2y_1+3y_2+4y_3=6\end{cases}$$

两个方程组系数矩阵一样，故可

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&4&5\\0&-1&-2&-3&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\end{array}\right]$$

解出

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\4\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-2+k_1&-3+k_2\\3-2k_1&4-2k_2\\k_1&k_2\end{bmatrix},k_1,k_2\text{ 是任意常数}$$

例13 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,7,a,1)^{\mathrm{T}}$线性相关，则 $a=$ ________.

【分析】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&-1&5\\3&1&7\\1&3&a\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&5\\0&4&-8\\0&4&a-5\\0&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&5\\0&1&-2\\0&0&a+3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $a=-3$.

例 14 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,a+2)^{\mathrm{T}}$，若 $\boldsymbol{\beta}_1=(4,-3,15)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_2=(2,5,a)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，写出 $\boldsymbol{\beta}_1$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示的表达式.

【解】 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 有解，
$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即方程组 $y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=\left[\begin{array}{ccc:cc}2&1&3&4&2\\3&0&5&-3&5\\3&3&a+2&15&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}-1&1&-2&7&-3\\3&0&5&-3&5\\0&3&a-3&18&a-5\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&-1&2&-7&3\\0&3&-1&18&-4\\0&0&a-2&0&a-1\end{array}\right]$$

$\forall a$，方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-7\\3x_2-x_3=18\\(a-2)x_3=0\end{cases}$ 一定有解，即 $\boldsymbol{\beta}_1$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

当且仅当 $a=2$ 时 $\begin{cases}y_1-y_2+2y_3=3\\3y_2-y_3=-4\\0y_3=1\end{cases}$ 无解，即 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=2$ 时，

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-7\\&3&-1&18\\&&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&5&0&29\\&-3&1&-18\\&&0&0\end{array}\right]$$

得方程组通解

$$\boldsymbol{x}=(29,0,-18)^{\mathrm{T}}+k(-5,1,3)^{\mathrm{T}},$$

那么

$$\boldsymbol{\beta}_1=(29-5k)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2+(-18+3k)\boldsymbol{\alpha}_3,k\text{ 为任意常数}.$$

例 15 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(4,3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,3,-2)^{\mathrm{T}}$$

【解】 设所求齐次方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

由 $n-r(\boldsymbol{A})=2$，且 $n=4$，知 $r(\boldsymbol{A})=2$.

又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\mathbf{0}$，转置得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$$

考查齐次方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

由 $n - r(\boldsymbol{B}) = 4 - 2 = 2$，从而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$，解出 $x_1 = 2, x_2 = -3$，

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$，解出 $x_1 = -2, x_2 = 2$，

于是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系为

$$(2, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (-2, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

故 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

那么所求齐次方程组是

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 0 \end{cases}$$

【注】 所求方程组是不唯一的.

志不强者智不达。

——《墨子》

第五章　特征值和特征向量

本章考点

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质 相似矩阵的概念及性质 矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵 实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

一、特征值、特征向量

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**，称非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的一个**特征向量**.

由定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，即 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 可见特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

定义 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为一个 n 阶矩阵，则行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**.

求特征值，特征向量的方法：

(1) 先由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i（共 n 个）. 再由 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求基础解系，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.

(2) 用定义 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 推理分析.

定理 5.1 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 分别是与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 5.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

(1) $\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$，

(2) $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$.

【注】 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，那么当 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 非零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

如 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\forall k\neq0$，有 $k\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{A\alpha}=k(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(k\boldsymbol{\alpha})$$

即若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，那么 $k\boldsymbol{\alpha}$（$k\neq0$ 时）仍是 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ 的特征向量.

类似地，如 $A\alpha_1=\lambda\alpha_1, A\alpha_2=\lambda\alpha_2$ 且 $\alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$，那么 $\forall k_1,k_2$，若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq 0$

有
$$\begin{aligned}A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)&=A(k_1\alpha_1)+A(k_2\alpha_2)\\&=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2\\&=k_1(\lambda\alpha_1)+k_2(\lambda\alpha_2)\\&=\lambda(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\end{aligned}$$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 仍是 A 关于 λ 的特征向量.

例 1 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\0&18-\lambda&\lambda-18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-17&4&2\\2&\lambda-10&4\\0&0&\lambda-18\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-18)(\lambda^2-27\lambda+162)=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=18, \lambda_3=9$.

当 $\lambda=18$ 时，由 $(18E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1=[-2,1,0]^T, \alpha_2=[-2,0,1]^T$.

因此属于特征值 $\lambda=18$ 的特征向量是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2 不全为 0）.

当 $\lambda=9$ 时，由 $(9E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-8&2&2\\2&-5&4\\2&4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-5&4\\2&4&-5\\-8&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&9&-9\\0&-18&18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3=[1,2,2]^T$.

因此属于特征值 $\lambda=9$ 的特征向量是 $k_3\alpha_3$（$k_3\neq 0$）.

例 2 求 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

【解】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

得到矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，解方程 $(E-A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系　$\alpha_1 = (-1,-2,1)^T$.

所以特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 (k_1 \neq 0)$.

当 $\lambda_3 = 2$ 时，解方程 $(2E-A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系　$\alpha_2 = (0,0,1)^T$. 所以特征值 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k_2\alpha_2 (k_2 \neq 0)$.

【注】 通过例1和例2大家应当注意到当特征值是二重根时，有可能只有一个线性无关的特征向量，也可能有两个线性无关的特征向量，这一点在后面相似对角化问题上是重要的.

例 3　求 $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值，特征向量.

【解】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda)$$

矩阵 A 的特征值：$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$.

对 $\lambda = 1$，由 $(E-A)x = 0$，

$$E - A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系 $\alpha_1 = (0,2,1)^T$.

$\lambda = 1$ 的所有特征向量：$k_1\alpha_1 = k_1(0,2,1)^T, k_1 \neq 0$.

对 $\lambda = 0$，由 $(0E-A)x = 0$，

$$0E - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系 $\alpha_2 = (-1,4,1)^T$.

$\lambda = 0$ 的所有特征向量：$k_2\alpha_2 = k_2(-1,4,1)^T, k_2 \neq 0$.

对 $\lambda=-3$，由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\0&-2&-4\\-1&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-4,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda=-3$ 的所有特征向量：$k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_3(-4,-2,1)^{\mathrm{T}},k_3\neq0$.

例 4 设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 证明

(1) $\lambda+k$ 是 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值.

(2) λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值.

【证】 因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量.

即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

(1) $(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\alpha}+(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}=(\lambda+k)\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，

所以 $\lambda+k$ 是 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值.

(2) 由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$$

递推地，$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\lambda^m\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，

所以 λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值.

例 5 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值是 $-1,0,4$，又知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是________.

【分析】 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -1 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1$，即 $\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$.

由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$ 有 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，那么

$$\boldsymbol{B\alpha}_1=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{A\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1$$

所以，3 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量.

类似地，由 $\boldsymbol{A\alpha}_2=0\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=4\boldsymbol{\alpha}_3$

知 $\boldsymbol{B\alpha}_2=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{B\alpha}_3=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $3,2,-2$.

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，有特征值 $1,-1,2$. 则下列矩阵中可逆矩阵是

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.　　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$.　　(C) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$.　　(D) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$.

【分析】 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,-1,2$. 于是

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $2,0,3$.

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $0,-2,1$.

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $3,1,4$.

$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $-1,-3,0$.

又 $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$，故应选(C).

例 7 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$.

证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -3.

【证】　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是其特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，

那么 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}$

由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$　得 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

即 $$(\lambda^2+2\lambda-3)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

故 $$\lambda^2+2\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -3.

例 8　已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

【分析】　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于特征值 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，

那么 $$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

即 $\begin{cases}2-1-2=\lambda\\5+a-3=\lambda\\-1+b+2=-\lambda\end{cases}$　得 $a=-3$，$b=0$.

练习 5.1

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-4&-4\\0&2&0\\2&-2&-3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征向量

(A) $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.　(B) $(3,3,-6)^{\mathrm{T}}$.　(C) $(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.　(D) $(4,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,3，那么 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 的最大特征值是________.

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征向量. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-2&-1\\-3&1&3\end{bmatrix}$.

(4) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征向量. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$.

(5) 证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，举 2 阶矩阵说明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量可以不同.

（练习答案在 297 页）

二、相似矩阵

定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

根据相似的定义，可知

性质 (1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$，反身性.

(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$，对称性.

(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$，传递性.

两个矩阵相似的必要条件

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\begin{cases}\Rightarrow (1)\ \text{特征多项式相同，即}\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|;\\ \Rightarrow (2)\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\ \text{有相同的特征值};\\ \Rightarrow (3)\ r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B});\\ \Rightarrow (4)\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i;\\ \Rightarrow (5)\ \sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.\end{cases}$$

由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，注意联想：

(1) 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$，进而 $\boldsymbol{A}^n\sim\boldsymbol{B}^n$.

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 于是

$$\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$$

所以 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$.

(2) 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}$.

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. 那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}$$

所以 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}$.

(3) 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $|\boldsymbol{B}|\neq0$，即 $\boldsymbol{B}$ 必可逆.

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

定理 5.3 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，且

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

定理 5.4 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值中，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数. 即

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n_i 重特征值，则 λ_i 有 n_i 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$，$\lambda_i$ 为 n_i 重特征值.

"求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$"解题步骤：

1. 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$（设为 3 阶）的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$（可以有重根）
2. 求出线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.
3. 构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$.

注意：若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，记 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$

即有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

故若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$.

反之，若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}\Rightarrow\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}=(a_1\boldsymbol{\alpha}_1,a_2\boldsymbol{\alpha}_2,a_3\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$\Rightarrow\boldsymbol{A\alpha}_1=a_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=a_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=a_3\boldsymbol{\alpha}_3$

因 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

例 9　已知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

【分析】　由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，那么

$$|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{vmatrix}=16$$

例 10　已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$，则秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$ ________.

【分析】　由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，故 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2$.

例 11　(2014，数农) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&1&0\\1&a&0\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵.

(1) 求 a.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 并验算.

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & -a & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值:1,1,-1.

(1) 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，而 $\lambda=1$ 是二重特征值，

那么 $\lambda=1$ 应有 2 个线性无关的特征向量.

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 应有 2 个线性无关的解，

故 $n-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，

即 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -a & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & a+2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$\therefore a=-2$.

(2) 把 $a=-2$ 代入.

对 $\lambda=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-1$，由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$.

验算如下：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

例 12　证明矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不能相似对角化.

【证】　由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$$

得到矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

于是 $n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$，说明齐次方程组 $(2E - A)x = 0$ 只有一个线性无关的解，亦即 $\lambda = 2$ 只有 1 个线性无关的特征向量.

3 重特征值只有 1 个线性无关的特征向量，故 A 不能相似对角化.

练习 5.2

(1) 已知 $A \sim B$，若 $A^2 = E$，则 $B^2 =$ ________.

(2) 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,3. 对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 若 $P = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$，则 $P^{-1}AP =$ ________.

(3) 下列矩阵中不能相似对角化的矩阵一共有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 0 个.

(4) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & -6 & 2 \end{bmatrix}$ 可以相似对角化，求 a 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

（练习答案在 298 页）

三、实对称矩阵

定理 5.5　实对称矩阵必可相似对角化.

定理 5.6　实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量相互正交.

定理 5.7　设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必存在正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \Lambda$.

"实对称矩阵用正交矩阵相似对角化"解题步骤

1. 求出矩阵 $\boldsymbol{A}$(设为 3 阶)的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

2. 求出相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

3. 改造特征向量

1° 如果特征值不同,特征向量已正交,只需单位化,记为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$.

2° 如果特征值有重根,要先判断特征向量是否已正交?

若已正交则只需单位化;若不正交则要正交化处理,记为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$.

4. 把上述特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 构成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$.

即有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$.

【注】 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_1\neq\lambda_2$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 右乘 $\boldsymbol{\alpha}_2$,得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2$$

$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故必有 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

例13 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵,特征值是1,2,3,$\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=2$ 的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,-1)^{\mathrm{T}}$,则 $\lambda=3$ 的特征向量为________.

【分析】 因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(-1)\cdot1+(-1)\cdot a+1\cdot(-1)=0$$

$\therefore a=-2$.

设 $\lambda=3$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

则 $\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)=-x_1-x_2+x_3=0\\(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)=x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}=k(1,0,1)^{\mathrm{T}},k\neq0$.

例14 已知 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,若 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为________.

【分析】 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,则 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$,于是由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 即$(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1或0.

因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 那么 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}$.

故 $r(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$,所以 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为:1,0,0.

【注】 注意和例 7 的区别.在那里不能求出 $\boldsymbol{A}$ 的具体特征值!

例 15　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & -1\\ a & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,如 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 a.

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式非零,于是

$$r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$$

而 $\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ a & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a+1)^2$,

所以 $a=-1$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-3 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值:1,4,0.

对 $\lambda=1$,由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=4$,由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=0$,由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因实对称矩阵、特征值不同特征向量已正交单位化,有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 0\end{bmatrix}$.

例 16　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,特征值是 3,0,0,对应于 $\lambda=3$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(3) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 (1) 实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交,设 $\lambda=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,$

$x_3)^T$ 则 $x_1+x_2+x_3=0$.

解出 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^T$.

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量为：$k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_2,k_3$ 不全为 0.

(2) 由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$$

故 $\boldsymbol{A}=(3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}3&0&0\\3&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\3&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

(3) 对 $\lambda=0$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不正交，故需正交化：

令 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^T$，

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

再单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$.

【注】 有困难可到强化班再来处理！

练习 5.3

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 若齐次方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的每一个解均可由 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是________.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，秩为 2，$\lambda=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量.

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(练习答案在 298 页)

第六章　二次型

本章考点

二次型及其矩阵表示 合同变换与合同矩阵 二次型的秩 惯性定理 二次型的标准形和规范形 用正交变换和配方法化二次型为标准形 二次型及其矩阵的正定性

一、二次型及其标准形

定义 n 个变量的一个二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ +\cdots+a_{nn}x_n^2 \qquad ①$$

称为 n **个变量的二次型**,系数均为实数时,称为 n **元实二次型**.

若令 $a_{ij}=a_{ji}$,$i<j$,则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,那么二次型①可以写成矩阵形式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**,称为二次型 f 的对应矩阵.

例如:$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

注意: 当 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵时,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 一一对应.

定义 若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 只有平方项,没有混合项(即混合项的系数全为零),即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$$

则称二次型为**标准形**(又称平方和).

在二次型的标准形中,若平方项的系数 a_i 只是 $1,-1,0$,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$$

则称为二次型的**规范形**(系数中1的个数是p个,-1的个数是q个,0的个数是$n-(p+q)$个).

定义 在二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的标准形中,正平方项的个数$p$称为二次型的**正惯性指数**,负平方项的个数$q$称为二次型的**负惯性指数**.

定义 二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$矩阵$\boldsymbol{A}$的秩称为二次型的秩.

【注】 对于 $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&3&0\\1&0&0\\0&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

有 $f=(x_1+x_2,3x_1+4x_3,-x_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$=(x_1+x_2)x_1+(3x_1+4x_3)x_2-x_3^2$

故 $f=x_1^2-x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$,三元二次型,其二次型矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&2\\0&2&-1\end{bmatrix}$,秩$r(f)=r(\boldsymbol{A})=2$

虽$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&3&0\\1&0&0\\0&4&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$是二次型,但矩阵$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&0&0\\0&4&-1\end{bmatrix}$不是二次型矩阵,其秩也不是二次型的秩.

定义(合同) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个$n$阶方阵,若存在可逆阵$\boldsymbol{C}$,使得$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,则称$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$,记成$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

合同矩阵有如下性质

反身性:$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$.

对称性:若$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$.

传递性:若$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}$,则$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$.

对于三元二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

如果$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3\\x_3=c_{31}y_1+c_{32}y_2+c_{33}y_3\end{cases}$ $(*)$

满足
$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

则称$(*)$是由$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$到$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$的**坐标变换**.

用矩阵描述即:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$.

注意 以$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$为自变量的二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$经坐标变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$后将成为以$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$为自变量的二次型$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,其中$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.可见经坐标变换二次型矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是合同的.

定理6.1 对任意一个n元二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,必存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,其中$\boldsymbol{Q}$是正交阵,化二次型为标准形.即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

用矩阵的语言表达，即对任意一个 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$，必存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $\boldsymbol{A}$ 必既相似又合同于对角阵.

【注】　正交变换法只能化二次型为标准形，平方项的系数即是特征值.

定理 6.2　任一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都可以通过（配方法）可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆阵，化成标准形. 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

用矩阵的语言表达，即对任意一个 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$. 其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$$

定理 6.3　（惯性定理）对一个二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换化为标准形，其正惯性指数和负惯性指数都是唯一确定的.

例 1　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$$

的秩为 2，则(1)$c=$ ________；(2) 正惯性指数 $p=$ ________.

【分析】　二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 3 & c\end{bmatrix}$$

(1)$r(f)=2\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=2$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 3 & c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & c+7\end{bmatrix}$$

$\therefore c=-7$.

(2) 由配方法

$f=x_1^2-x_2^2-7x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$

$\quad=[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-x_2^2-7x_3^2+6x_2x_3-(x_2-x_3)^2$

$\quad=(x_1+x_2-x_3)^2-2(x_2-2x_3)^2$

得标准形 $f=y_1^2-2y_2^2$

$\therefore p=1$.

例 2 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_2x_3-4x_3x_1$$

为标准形,写出所用坐标变换,并验证 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 先把所有含 x_1 的项配成一个完全平方,即有

$$\begin{aligned}f&=2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]+3x_2^2+5x_3^2-8x_2x_3-2(x_2-x_3)^2\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3\end{aligned}$$

再把所有含 x_2 的项配成一个完全平方,即

$$\begin{aligned}f&=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2)+3x_3^2-4x_3^2\\&=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-x_3^2\end{aligned}$$

引入新变量.令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3\\y_2=x_2-2x_3\\y_3=x_3\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

则有 f 的标准形 $f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

用矩阵描述即:二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&3&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$,经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy}$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Cy})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Cy})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda y}=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,

验证: $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&3&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2&2&-2\\0&1&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

【注】 对 $f=2(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-2x_3)^2-x_3^2$.

如令

$$\begin{cases}y_1=\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}x_3\\y_2=x_2-2x_3\\y_3=x_3\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-y_2-y_3\\x_2=y_2+2y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

则有 f 的规范形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

用配方法可得到规范形.

例 3 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为标准形 $y_1^2+4y_2^2$,则 $a=$ ________.

【分析】 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经正交变换化为标准形 $y_1^2+4y_2^2$,那么标准形中的平方项系数 1,4,0 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

现 $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，由

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a-1&0\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2=0$$

得 $a=1$.

例 4　二次型 $f(x_1,x_2)=x^TAx$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $y_1^2+3y_2^2$，若 Q 的第一列是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$，则 $Q=$ ________.

【分析】　二次型 x^TAx 经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $y_1^2+3y_2^2$，那么标准形中平方项系数 1，3 就是矩阵 A 的特征值，而正交矩阵 Q 就是 A 的特征向量.

已知 Q 的第一列是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$，即矩阵 A 关于 $\lambda=1$ 的特征向量是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$. 设 $\lambda=3$ 的特征向量是 $\alpha=[x_1,x_2]^T$.

于是 $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2=0$，解出基础解系 $[1,-1]^T$，单位化为 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$.

所以 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

例 5　用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3$ 为标准形，写出所用坐标变换，并用 $Q^TAQ=\Lambda$ 验证.

【解】　二次型矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值：1，3，-2.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T$.

当 $\lambda=3$ 时，由 $(3E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-2$ 时,由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交,故只需单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,1)^{\mathrm{T}}$$

那么令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=y_1^2+3y_2^2-2y_3^2$.

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{\sqrt{5}}&\frac{6}{\sqrt{5}}\\0&\frac{4}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

例 6 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形,并写出所用坐标变换.

【解】 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&0&5-\lambda\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&0&0\\2&\lambda-4&4\\4&2&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 4 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 4),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值:5,5,−4.

当 $\lambda = 5$ 时,由 $(5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -2, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda = -4$ 时,由 $(-4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda = 5$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交,用施密特正交化有:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

那么令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,经 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y} = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$$

"用正交变换化二次型为标准形",解题步骤

1. 写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$.
2. 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
3. 求出相应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.
4. 改造特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$.

   1° 如果特征值不同只需单位化.

   2° 如果特征值有重根,要先判断特征向量是否已正交?若已正交则只需单位化,否则 Schmidt 正交化.
5. 构造正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$

则经 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有　　$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$

例 7 已知二次型
$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$
的秩为 2.

(1) 求 c 的值;

(2) 求二次型的正惯性指数、负惯性指数.

【解】 (1) 二次型矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}$$
二次型的秩 $r(f)=r(\boldsymbol{A})=2$,
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&4&0\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&6&-3\\0&-6&c\end{bmatrix}$$
解出 $c=3$.

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$

得特征值为:4,9,0.

所以正惯性指数 $p=2$,负惯性指数 $q=0$.

【注】 也可用配方法,有:
$$f=5\left(x_1-\frac{1}{5}x_2+\frac{3}{5}x_3\right)^2+\frac{6}{5}(2x_2-x_3)^2$$
而得 $p=2,q=0$.

例 8 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$.

【分析】 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}},q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$.

(1) 由特征值
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$
知二次型的标准形为 $2y_1^2+3y_2^2-y_3^2$,即 $p=2,q=1$. 所以选(B).

(2) 用配方法
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2\\&=(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2)-4x_2^2+x_2^2+2x_3^2\\&=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+2x_3^2\\&=y_1^2-3y_2^2+2y_3^2\end{aligned}$$

亦知 $p=2,q=1$. 选(B).

例 9 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}$, C 是 3 阶可逆矩阵，且 $C^TAC=\Lambda$，则 $C=$ ________.

【分析】 $C^TAC=\Lambda$ 且 C 可逆，即 $A\simeq\Lambda$，亦即二次型 x^TAx 经坐标变换 $x=Cy$ 化成标准形 $y^T\Lambda y$，求矩阵 C 就是求二次型化为标准形时的坐标变换矩阵.

$$\begin{aligned}x^TAx&=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3\\&=(x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2)-2x_2^2+4x_2x_3-2x_3^2\\&=(x_1-2x_2)^2-2(x_2-x_3)^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

故当 $C=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 时，$C^TAC=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&0\end{bmatrix}$.

【注】 坐标变换不唯一. 矩阵 C 不唯一，也可用正交变换化二次型为标准形.

二、正定二次型

定义（正定） 若对于任意的非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx>0$$

则称二次型 f 为**正定二次型**，对应矩阵为**正定矩阵**.

例如：三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2$，

$$\forall x=\begin{pmatrix}t\\u\\v\end{pmatrix}\neq \mathbf{0}，恒有\ f(t,u,v)=t^2+3u^2+5v^2>0$$

所以二次型 f 正定，矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&5\end{bmatrix}$ 是正定矩阵.

又如三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_3^2+5x_1x_2$ 不是正定二次型，因为当 $x=(0,1,0)^T$ 时，$f(0,1,0)=0$ 不满足 $\forall x\neq\mathbf{0},f>0$ 的要求.

定理 6.4 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

由定理可知，对一般的二次型(或对称阵)应设法作可逆线性变换化成标准形(或规范形)，看 d_i 是否均大于零来判别其正定性.

定理 6.5 f 正定的充要条件

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 正定

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数 $p=n$

$\Leftrightarrow A\simeq E$，即存在可逆阵 C，使得 $C^TAC=E$

$\Leftrightarrow A=D^TD$，其中 D 是可逆阵

$\Leftrightarrow A$ 的全部特征值 $\lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$,

$\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于零,即

若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |A| > 0.$

定理 6.6 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定的必要条件

若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定,则

(1)A 的主对角元素 $a_{ii} > 0$.

(2)A 的行列式 $|A| > 0$.

例 10 下列矩阵中,正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

【分析】 (A) 中 2 阶主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} < 0$,(B) 中 $a_{33} < 0$,(C) 中 $|A| = 0$,故均不正定,唯有(D) 的顺序主子式全大于 0.

例 11 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

的正定性.

【解】 **方法一** (用顺序主子式)二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0, \Delta_3 = |A| = 10 > 0$$

所以 f 是正定二次型.

方法二 (用特征值)由 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

A 的特征值 1,1,10 全大于 0,所以二次型 f 正定.

方法三 (用配方法)

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2-x_3) + (x_2-x_3)^2] + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 - 2(x_2-x_3)^2 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2 + 3(x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2) + 3x_3^2 - \frac{4}{3}x_3^2 \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

可知正惯性指数 $p=3$，负惯性指数 $q=0$，故二次型正定.

例12　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

正定，求 t 的取值.

【解】　二次型矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

其顺序主子式

$$\Delta_1=1,\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2,\Delta_3=|A|=-4t^2-4t+8$$

正定的充分必要条件是顺序主子式全大于0，故

$$\begin{cases}4-t^2=(2-t)(2+t)>0, & t\in(-2,2)\\ -4t^2-4t+8=-4(t-1)(t+2)>0, & t\in(-2,1)\end{cases}$$

故 $t\in(-2,1)$ 时，二次型 f 正定.

例13　设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，若 $A+kE$ 是正定矩阵，则 k ________.

【分析】　A 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda>0$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -\lambda-1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$

A 的特征值为：$0,-1,3$，

$A+kE$ 的特征值为：$k,k-1,k+3$，

$$A+kE\text{ 正定}\Leftrightarrow\begin{cases}k>0\\ k-1>0\\ k+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\quad k>1.$$

例14　已知 A 是正定矩阵，证明 A^* 是正定矩阵.

【证】　因 A 正定 $\Rightarrow A^T=A$，A 可逆且 $|A|>0$.

由 $(A^*)^T=(A^T)^*=A^*\Rightarrow A^*$ 是对称矩阵.

方法一　(用定义) 因 A 可逆，$x=Ay$ 是坐标变换，且 $\forall x\neq 0$ 必有 $y\neq 0$，那么 $\forall x\neq 0$.

$$x^TA^*x\xlongequal{x=Ay}(Ay)^TA^*(Ay)=y^T(|A|A)y=|A|\ y^TAy$$

因 A 正定，$|A|>0$，$y^TAy>0$，从而 $\forall x\neq 0$，$x^TA^*x=|A|\ y^TAy>0$，故 A^* 正定.

方法二　(用特征值) 设 $A^*\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$

于是 $AA^*\alpha=\lambda A\alpha$，即 $\lambda A\alpha=|A|\alpha$

由 A 可逆知 A^* 必可逆，那么 A^* 的特征值 $\lambda\neq 0$

从而有 $A\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$，即 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 是 A 的特征值.

因 $\boldsymbol{A}$ 正定，得$\frac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|>0$，而$|\boldsymbol{A}|>0$，故必有 $\lambda>0$，

$\therefore \boldsymbol{A}^*$ 正定.

练习 6

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$________.

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_3$ 的规范形是________.

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$的合同标准形是________.

(4) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$，用正交变换法化其为标准形，并写出所用坐标变换.

(5) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 的正定性.

（练习答案在 298 页）

道虽迩，不行不至，
事虽小，不为不成。

——《荀子》

练习题答案

练习 1

(1)2　(2)$(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$可用范德蒙?

(3)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$可用拉普拉斯或直接展开.

(4)0 或 1　(5)1 或 -1　(6)2

练习 2.1

注意这 6 个符号,是矩阵?还是数?数与矩阵的关系.

(1)$\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&6&-3\\2&4&-2\end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&4\\-1&-3&-2\end{bmatrix}$　(3)5　(4)5　(5)$\begin{bmatrix}1&3&2\\3&9&6\\2&6&4\end{bmatrix}$　(6)6

练习 2.2

(1)$x_1^2+7x_2^2+8x_1x_2$　(2)$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$　(3)$\begin{bmatrix}0&6\\0&6\end{bmatrix}$

练习 2.3

(1)D　(2)$\begin{bmatrix}-4&-3\\-1&-1\end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(4)$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$

练习 2.4

(1)$\begin{bmatrix}2&1&3\\10&8&12\\8&7&9\end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix}2&5&4\\1&3&1\\1&5&2\end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&2\\0&3&0\end{bmatrix}$　(4)$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

练习 2.5

(1)24(有同学得 -24 吗?)　(2)$\dfrac{27}{5}$(注意 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$)

练习 3.1

(1)$a=5$　(2)$a=-9$　(3)D

练习 3.2

(1)$r=2$

(2) 当 $a=2$ 时,$r=2$.极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

当 $a\neq 2$ 时,$r=3$.极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

练习 3.3

(1)B　(2)A

练习 4.1

(1)$(2,1,0,0)^T,(-3,0,1,0)^T,(4,0,0,1)^T$　(2)$\lambda\neq 1$

(3)D　(4)$k_1(-2,2,1,0,0)^T+k_2(3,2,0,1,2)^T$　k_1,k_2 为任意常数

练习 4.2

(1)$a=-2$　(2)$(0,0,0,-1)^T+k_1(-1,1,0,0)^T+k_2(-1,0,1,-2)^T$　k_1,k_2 为任意常数

(3) 当 $a=3$ 时方程组有解,$(2,1,0)^T+k(1,-3,1)^T$　k 为任意常数

练习 5.1

(1)D　(2)37

(3) 特征值:4,0,-2,特征向量依次为 $k_1(7,4,-17)^T,k_2(1,0,1)^T,k_3(1,-2,1)^T$,$k_1$,$k_2,k_3$ 全不为 0

(4) 特征值:1,1,−5,$\lambda=1$ 时特征向量为 $k_1(1,1,0)^{\mathrm T}+k_2(1,0,1)^{\mathrm T}$,$k_1,k_2$ 不全为0;$\lambda=-5$ 时特征向量为 $k_3(-1,1,1)^{\mathrm T}$,$k_3\neq 0$

(5) 因 $|\lambda\boldsymbol E-\boldsymbol A|=|(\lambda\boldsymbol E-\boldsymbol A)^{\mathrm T}|=|(\lambda\boldsymbol E)^{\mathrm T}-\boldsymbol A^{\mathrm T}|=|\lambda\boldsymbol E-\boldsymbol A^{\mathrm T}|$,故 $\boldsymbol A$ 和 $\boldsymbol A^{\mathrm T}$ 有相同的特征值.

例如 $\boldsymbol A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol A$ 和 $\boldsymbol A^{\mathrm T}$ 的特征值都是 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

但矩阵 $\boldsymbol A$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量是 $k(1,0)^{\mathrm T}$,而 $\boldsymbol A^{\mathrm T}$ 的特征向量是 $k(0,1)^{\mathrm T}$.

练习 5.2

(1)$\boldsymbol E$ (2)$\boldsymbol P^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$ (3)B (其中第二和第三两个矩阵不能相似对角化)

(4)$a=2$ $\boldsymbol P=\begin{bmatrix}3&0&-1\\1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ 时 $\boldsymbol P^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-2\end{bmatrix}$

练习 5.3

(1)2 2 2 1 注:$\boldsymbol\alpha$ 是 $(\boldsymbol E-\boldsymbol A)\boldsymbol x=\boldsymbol 0$ 的基础解系,$r(\boldsymbol E-\boldsymbol A)=3$;$\boldsymbol A\sim\boldsymbol\Lambda\Rightarrow r(\boldsymbol E-\boldsymbol\Lambda)=3$

(2)$\lambda=0$,特征向量 $k(-1,1,1)^{\mathrm T}$ 注:$r(\boldsymbol A)=2\Rightarrow|\boldsymbol A|=0$,所以 $\lambda=0$ 是特征值

(2)$\boldsymbol Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ 时,$\boldsymbol Q^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$

练习 6

(1)5 (2)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$ (3)$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$

(4)$\boldsymbol x=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}\boldsymbol y$,$\boldsymbol x^{\mathrm T}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol y^{\mathrm T}\boldsymbol{\Lambda y}=3y_1^2-2y_2^2$

(5) 不正定. 对二次型矩阵 $\boldsymbol A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$,有 $|\boldsymbol A|=0$,所以二次型不是正定二次型. 注意若令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2-x_3\\y_3=-x_1+x_3\end{cases}$ (∗),则因 $\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=0$ 而知(∗)不是坐标变换.